目 录

第一章 集合的布尔代数

§1.1 集合及其运算

当人们在大脑里逐步形成某个概念的时候，有两个方面是离不开的。一方面，从本质属性掌握该概念的内在涵义，这叫做该概念的内涵；另一方面，说明该概念究竟由哪些事物体现，这叫做该概念的外延。

集合实际上是体现概念的外延，它是现代数学的基础。

无论我们讨论什么具体问题，总是把所考虑的对象限制在一定范围内，这个范围叫做论域。论域中的每个对象叫做元素。论域的每一部分叫做论域上的普通集合，简称集合或集。通常以英文字母表末后的大写字母U，V，W，…等表示论域，以开头的大写字母A，B，C，…等表示集合，以小写字母a，b，c，…等表示元素。论域也叫做全集，元素简称为元。

在论域U中任意指定一个元素u以及任意指定一个集合A。当元素u属于集合A时，记作$u\in A$或$A\ni u$；当元素u不属于集合A时，记作$u\notin A$或$A\not\ni u$。普通集合论要求，在u与A之间的联系只有两种可能，要么$u\in A$，要么$u\notin A$，非此即彼。

没有元素的集合叫做空集，记作ϕ。空集看起来很不自然，但缺之不可。

由有限个元素a_1，a_2，…，a_n构成的集合，叫做有限集，记作

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

值得特别提到的是单元素集，它是仅有一个元素 a 的集合，记作 $\{a\}$。元素 a 与集合 $\{a\}$ 是两个不同概念，不能混为一谈。我们有 $a\in\{a\}$。具有无限多个元素的集合叫无限集。

集合 A 叫做集合 B 的子集，或者说集合 B 包含集合 A，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，意思都是指 A 的每个元也是 B 的元。如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称 A，B 相等，记作 $A=B$。A，B不相等记作 $A\neq B$。非空集合 A 叫做集合 B 的真子集，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，意思是指 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$。ϕ 及B叫做 B 的平凡子集。

对于论域U 上的每个集合 A 来说，永远有 $\phi\subseteq A$ 并且 $A\subseteq U$。

为简便计，将引进一些符号：

$\forall x\in A$表示集合 A 中的每个元素 x；

$\exists x\in A$ 表示集合 A 中存在一个元素 x；

$P\Longrightarrow Q$表示若性质 P 成立，则性质 Q 成立；

$P\Longleftrightarrow Q$ 表示当且仅当性质 P 成立时，性质 Q 成立；

$P(x)$ 表示元素 x 具有性质 P；

$A=\{x\mid P(x)\}$表示 A 是由论域中具有性质 P 的那些元素 x 构成的集合。

设 U 是论域。记

$$\mathscr{P}(U)=\{A\mid A\subseteq U\},$$

$\mathscr{P}(U)$叫做 U 上的幂集。如果 U 具有 n 个元素，则 $\mathscr{P}(U)$具有 2^n 个元素。

定义1 设 U 为论域，又A，$B\in\mathscr{P}(U)$

(i) 由 A，B的元素共同构成的集合叫做A，B的**并集**，

记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{u|u\in A \text{ 或 } u\in B\}$$

(ii) 由 A，B 的公共元素构成的集合叫做 A，B 的**交集**，记作$A\cap B$，即

$$A\cap B=\{u|u\in A \text{ 且 } u\in B\}.$$

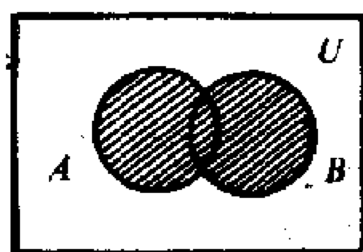
(iii) 由属于 A 但不属于 B 的元素构成的集合叫做 A，B 的**差集**，记作 $A\backslash B$，即

$$A\backslash B=\{u|u\in A \text{ 且 } u\notin B\}.$$

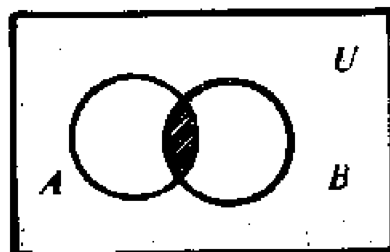
(iv) U，A的差集叫做 A在 U 中的补集，简称 A 的**补集**，记作 A^c，即

$$A^c=U\backslash A$$

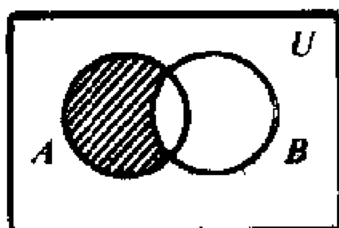
集合的并、交，差、补运算直观地示于图1。



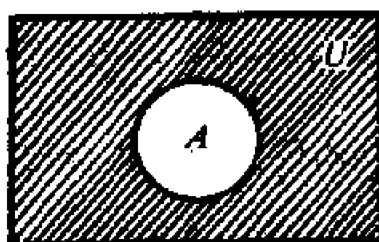
(a) $A\cup B$



(b) $A\cap B$



(c) $A\backslash B$



(d) A^c

图 1

设 A，B，$C\in\mathscr{P}(U)$。易证并、交、补运算满足如下算律。

(1) 幂等律　$A\cup A=A$，$A\cap A=A$；

(2) 交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(3) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(4) 吸收律　$A\cap(A\cup B)=A$，

$A\cup(A\cap B)=A$；

(5) 分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

(6) 基元律　$\phi\cup A=A$，$\phi\cap A=\phi$，

$U\cup A=U$，$U\cap A=A$；

(7) 补元律　$A\cup A^c=U$，$A\cap A^c=\phi$；

(8) 复原律　$(A^c)^c=A$；

(9) 对偶律　$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$，

$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$。

集合的并、交运算可以推广到任意多个集合上去。

定义2　给定义域 U 上的集合 A_t，$t\in T$，记

$$\bigcup_{t\in T}A_t=\{u\mid u\in U,\ \exists t\in T\text{使 }u\in A_t\},$$

$$\bigcap_{t\in T}A_t=\{u\mid u\in U,\ \forall t\in T\text{使 }u\in A_t\}.$$

$\bigcup_{t\in T}A_t$，$\bigcap_{t\in T}A_t$依次叫做集合族$\{A_t\mid t\in T\}$的并集与交集。

若$T=\{1,\ 2\}$，则$\bigcup_{t\in T}A_t$与$\bigcap_{t\in T}A_t$分别就是两个集合的并集与交集。若$T=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$，则$\bigcup_{t\in T}A_t$与$\bigcap_{t\in T}A_t$分别表示n个

集合的并集与交集。若 $T=\{1, 2\cdots, n, \cdots\}$ 则 $\bigcup_{t\in T}A_t$ 与 $\bigcap_{t\in T}A$ 分别表示可数个集合的并集与交集，这里的集合 T 叫做指标集；除非另有声明，平常都假设指标集非空。t 叫做指标。

易证

$$A\cap(\bigcup_{t\in T}A_t)=\bigcup_{t\in T}(A\cap A_t),$$

$$A\cup(\bigcap_{t\in T}A_t)=\bigcap_{t\in T}(A\cup A_t),$$

$$(\bigcup_{t\in T}A_t{}^c)=\bigcap_{t\in T}A_t{}^c,$$

$$(\bigcap_{t\in T}A_t{}^c)=\bigcup_{t\in T}A_t{}^c.$$

集合序列 A_1，A_2，$\cdots$，叫做单调递增，意思是指

$$A_n\subseteq A_{n+1},\qquad n=1, 2, \cdots,$$

此时，记

$$\lim_{n\to+\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\text{或}A_n\uparrow\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n.$$

这两个记号都表示 $\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n$ 是这个单调递增集合序列的极限。

完全类似，集合序列 A_1，A_2，$\cdots$，叫做单调递减，意思是指

$$A_n\supseteq A_{n+1},\qquad n=1, 2, \cdots$$

这个单调递减集合序列的极限记作

$$\lim_{n\to+\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{+\infty}A_n\text{或}A_n\downarrow\bigcap_{n=1}^{+\infty}A_n.$$

§1.2 集合的特征函数

给定非空集合 X 与非空集合 Y。我们把记号

$$f: X\to Y, \qquad x\longmapsto f(x)$$

叫做从 X 到 Y 的映射。所谓映射，实质上是函数概念的推广。它的意思是指，对每个 $x\in X$，都存在着唯一确定的元素 $y=f(x)\in Y$ 与之对应。为方便计，允许单独使用上述记号的前半部分 $f: X\to Y$ 表示从 X 到 Y 的映射 f。不过前半部分并未指明具体的对应规则。后半部分 $x\longmapsto f(x)$ 正是为了补充说明对应规则而设。我们形象地把元素 x 叫做元素 y 在映射 f 下的源点，反过来，元素 y 叫做元素 x 在映射 f 下的像点。X 叫做映射 f 的始集，Y 叫做映射 f 的终集。记

$$f(X)=\{y\mid y\in Y,\ \exists x\in X 使 y=f(x)\},$$

$f(X)$ 叫做映射 f 的射程。

定义1 给定映射 $f: X\to Y$。

(i) 映射 f 叫做**单射**，意思是指由 $f(x_1)=f(x_2)$ 必能推出 $x_1=x_2$。

(ii) 映射 f 叫做**满射**，意思是指 $f(X)=Y$。

(iii) 映射 f 叫做**双射**，意思是指 f 既是单射又是满射。

定义2 集合 X 与集合 Y 叫做基数相同，简称**同基**，记作 $|X|=|Y|$，意思是指，存在着从 X 到 Y 的双射。

定义3 映射 $f: X\to X$，$x\longmapsto x$ 叫做集合 X 上的**恒等映射**，记作 I_X，即 $I_X: X\to X$，$I_X(x)=x$。

定义4 给定 $f: X\to Y$，$g: Y\to Z$。映射 $h: X\to Z$ 叫做 f，g 的**复合映射**，记作 $h=g\circ f$，意思是指，对任何 $x\in X$，永远

成立着等式

$$h(x)=g(f(x)).$$

容易推出复合映射的下列性质。

(1) 给定 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$, $h:Z\to W$。那么 $h\circ(g\circ f)$ 及 $(h\circ g)\circ f$ 都是从 X 到 W 的映射，并且

$$(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f).$$

换言之，映射的复合运算满足结合律。

(2) 给定 $f:X\to Y$ 及 $g:Y\to Z$。如果 f,g 都是单射，则 $g\circ f$ 也是单射。

(3) 给定 $f:X\to Y$ 及 $g:Y\to Z$。如果 f,g 都是满射，则 $g\circ f$ 也是满射。

定理1 映射 $f:X\to Y$ 具备单满性的充分必要条件是存在着映射 $g:Y\to X$ 使 $g\circ f=I_X$ 且 $f\circ g=I_Y$。

证 充分性 已知存在着映射 $g:Y\to X$ 使 $g\circ f=I_X$ 且 $f\circ g=I_Y$。任取 $x_1,x_2\in X$，设 $f(x_1)=f(x_2)$。由于

$$x_i=I_X(x_i)=(g\circ f)(x_i)=g(f(x_i)),\quad i=1,2$$

因此 $x_1=x_2$。可见 f 是单射。

另外，对任何 $y\in Y$。令 $x=g(y)$，于是

$$f(x)=f(g(y))=(f\circ g)(y)=I_Y(y)=y$$

由此可见，$f(X)=Y$。即 f 是满射。

必要性 设 f 是单满射。对任何 $y\in Y$，存在着唯一的 $x_y\in X$ 使 $y=f(x_y)$。引进映射

$$g:Y\to X,\qquad g(y)=x_y.$$

于是对每个 $x\in X$ 均得出

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=x=I_X(x)$$

因此 $g\circ f=I_X$。

不仅如此，还有

$$(f\circ g)(y)=f(g(y))=f(x_y)=y=I_Y(y)$$

因此 $f\circ g=I_Y$。 □

推论 给定双射 $f:X\to Y$。则必唯一地存在着映射 $g:Y\to X$ 使得 $g\circ f=I_X$ 且 $f\circ g=I_Y$。不仅如此，这个映射 g 也具有单满性。

证 已知映射 $f:X\to Y$ 具备单满性。

由定理 1 的必要性得知，适合条件

$$g\circ f=I_X, \qquad f\circ g=I_Y$$

的映射 $g:Y\to X$ 是存在的。现在假设映射 $h:Y\to X$ 也适合同样的条件

$$h\circ f=I_X, \qquad f\circ h=I_Y .$$

于是利用复合映射的结合律得出

$$\begin{aligned}h&=h\circ I_Y=h\circ(f\circ g)=(h\circ f)\circ g\\&=I_X\circ g=g\end{aligned}$$

这便证明了映射 g 是唯一的。

最后，把定理 1 的充分性用于映射 $g:Y\to X$ 直接得知 g 具有单满性。

今后，我们把出现在推论中的那个唯一的双射 g 叫做已知双射 $f:X\to Y$ 的逆映射，并记作 $f^{-1}:Y\to X$。于是

$$f^{-1}\circ f=I_X, \qquad f\circ f^{-1}=I_Y.$$

现在以映射的概念为基础，着手引进集合的特征函数。

给定论域 U 上的集合 A。我们可以确定从 U 到 $\{0,1\}$ 的映射

$$\chi_A:U\to\{0,1\}$$

$$u\longmapsto \chi_A(u)=\begin{cases}1 & \text{当} u\in A\\ 0 & \text{当} u\in U\setminus A\end{cases}$$

映射 χ_A 叫做集合 A 的特征函数。

反过来，任意一个从 U 到$\{0,1\}$的映射 $f:U\to\{0,1\}$都唯一地确定U 上的集合 A 使得 $\chi_A=f$。事实上，

$$A=\{u\mid u\in U\text{使 } f(u)=1\}.$$

这是很明显的。

集合 A 的特征函数在 u 点处的值 $\chi_A(u)$叫做元素 u 对集合 A 的隶属度。当 $u\in A$ 时， $\chi_A(u)=1$，表示 u 彻底地隶属于 A；当 $u\notin A$ 时， $\chi_A(u)=0$，表示 u 彻底地不隶属于 A。

不难看出，特征函数满足下列运算性质。

$$A=B\Longleftrightarrow \chi_A(u)=\chi_B(u)\qquad(\forall u\in U)$$

$$A\subseteq B\Longleftrightarrow \chi_A(u)\leqslant \chi_B(u)\qquad(\forall u\in U)$$

$$A\subset B\Longleftrightarrow 0\doteqdot \chi_A(u)\leqslant \chi_B(u)\qquad(\forall u\in U)$$

$$\text{且}\exists u_0\in U\text{使 } \chi_A(u_0)<\chi_B(u_0).$$

$$\chi_{A\cup B}(u)=\mathrm{Max}\{\chi_A(u),\chi_B(u)\}\quad(\forall u\in U)$$

$$\chi_{A\cap B}(u)=\mathrm{Min}\{\chi_A(u),\chi_B(u)\}\quad(\forall u\in U)$$

$$\chi_{A^c}(u)=1-\chi_A(u)\qquad(\forall u\in U)$$

§1.3 等价关系

给定集合 A 及集合 B。称

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$$

为 A，B 的直积，称(a,b)为序偶，称 a 为序偶的第一坐标，b 为序偶的第二坐标。序偶(a,b)与序偶 (a',b') 相等，意 思是指 $a=a'$ 且 $b=b'$。因 此 $A\times B$ 与 $B\times A$ 不 必 相 等，除 非 $A=B$。另外，$A\times A$ 习惯上简写作A^2。

类似地定义 n 个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的直积

$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in A_i,i=1,2,\cdots,n\}$。称 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为序组，称 a_i 为序组的第 i 个坐标，$i=1,2,\cdots,n$。

定义1 给定集合 A 及集合 B。直积 $A\times B$ 的每个子集R都叫做从 A 到 B 的**关系**。当 $(a,b)\in$ R时，称 a,b 适合关系R，记作 aRb；当 $(a,b)\notin$ R时，称 a,b 不适合关系R，记作 $a\bar{R}b$。

给定映射 $f:X\to Y$。明显地 $\{(x,y)\mid x\in X,\ y=f(x)\}\subseteq X\times Y$。由此可见，如果仍令 f 表示所有序偶 $(x,f(x))$ 构成的集合，即令

$$f=\{(x,f(x))\mid x\in X\}$$

则从 X 到 Y 的映射 f 便成为从 X 到 Y 的关系的一种特殊形态。

同样，直积 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 的子集R叫做 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的关系。

称 A^2 的子集R为 A 上的二元关系简称 A 上的关系；称 A^n 的子集R为 A 上的 n 元关系。

集合 A 上的二元关系具备若干基本属性，在理论以及应用上发挥重要作用。

定义2 设非空的R是集合 A 上的关系。

(i) R叫做具备**自反性**，意思是指对每个 $a\in A$ 都有 aRa；

(ii) R叫做具备**对称性**，意思是指，由 aRb 必可推出 bRa；

(iii) R叫做具备**反对称性**，意思是指由 aRb 及 bRa 必

可推出$a=b$；

(iv) R 叫做具备**传递性**，意思是指，由$a\mathrm{R}b$及$b\mathrm{R}c$必可推出$a\mathrm{R}c$。

例1 在非空集A的幂集$\mathscr{P}(A)$上给定包含关系R_1，真包含关系R_2以及不相交关系R_3。

$$\mathrm{R}_1=\{(X,Y)\mid X,Y\in\mathscr{P}(A),X\subseteq Y\},$$
$$\mathrm{R}_2=\{(X,Y)\mid X,Y\in\mathscr{P}(A),X\subset Y\},$$
$$\mathrm{R}_3=\{(X,Y)\mid X,Y\in\mathscr{P}(A),X\cap Y=\phi\}.$$

易知R_1具备自反性、反对称性及传递性，但不具备对称性；R_2具备反对称性及传递性，但不具备自反性，也不具备对称性；R_3具备对称性，但不具备自反性、反对称性及传递性。

例2 设p是正整数。在所有整数的集合$\mathbf{Z}$上给定关系R，

$$\mathrm{R}=\{(m,n)\mid m,n\in\mathbf{Z},\ p\text{ 整除 }m-n\}.$$

易知R具备自反性、对称性及传递性，但不具备反对称性。

定义3 具备自反性、对称性及传递性的关系叫做**等价关系**。集A上的等价关系常记作$\sim\subseteq A\times A$或$\mathrm{E}\subseteq A\times A$。

定义4 给定集合A上的等价关系E。

(i) 设$a\in A$。A的子集$[a]_\mathrm{E}=\{x\mid x\in A,a\mathrm{E}x\}$叫做元素$a$所属的、由等价关系E诱导的、集$A$的等价类，简称元素$a$的**等价类**。

(ii) 由集A的所有等价类构成的集合叫做A的**等价商集**，记作A/E，即

$$A/\mathrm{E}=\{[a]_\mathrm{E}\mid a\in A\}.$$

如果只考虑集合A上的等价关系E而不牵涉集合A上的其它等价关系，那么无妨将等价类$[a]_\mathrm{E}$简写为$[a]$，并将

$[a]$的每个元叫做这个等价类的**代表**.

定义 5 由集合 A 的某些非空子集构成的集合 $\Pi=\{A_t \mid t\in T\}$ 叫做 A 的一个**分割**，意思是指，集合 A 的每个元素都必在而且只在其中之一 A_t 中，也就是说

(1) 当 $t\neq t'$ 时，$A_t\cap A_{t'}=\phi$;

(2) $\bigcup\limits_{t\in T} A_t=A$.

每个 A_t 叫做分割 Π 的一个分割块.

现在来看看 A 的等价类的一些性质.

(1) 对于 A 的每个元素 a 有 $a\mathrm{E}a$，因此 $a\in[a]$。从而 A 的每个元素 a 的等价类非空.

(2) 若 $a\mathrm{E}b$，则 $[a]=[b]$. 换言之，如果元素 a 与元素 b 适合等价关系 E，那么它们的等价类相同. 这是因为，对每个 $x\in[a]$有 $a\mathrm{E}x$，加之以 $a\mathrm{E}b$，于是 $b\mathrm{E}x$，从而 $x\in[b]$。由此得知$[a]\subseteq[b]$。类似地知$[b]\subseteq[a]$. 故$[a]=[b]$.

(3) 若 $a\bar{\mathrm{E}}b$，则$[a]\cap[b]=\phi$. 换言之，如果元素 a 与元素 b 不适合等价关系 E，那么它们的等价类不能有公共元素. 事实上，假如存在$x\in[a]\cap[b]$的话，那么 $x\in[a]$且 $x\in[b]$。于是 $a\mathrm{E}x$ 且 $b\mathrm{E}x$，从而 $a\mathrm{E}b$. 这与已知条件 $a\bar{\mathrm{E}}b$ 矛盾.

根据等价类的这些性质，我们得到

定理1 给定集合 A 上的等价关系 E。则等价商集 A/E 是 A 的一个分割.

证 刚才已指出每个等价类均非空.另外,易知任何两个不相同的等价类不能有公共元素.剩下来只要证明等式$\bigcup\limits_{a\in A}[a]$

$=A$ 就够了。明显地，$\bigcup\limits_{a\in A}[a]\subseteq A$。反过来，对任意元素 $x\in A$，有 $x\in[x]$，而且 $[x]\subseteq\bigcup\limits_{a\in A}[a]$；因此 $x\in\bigcup\limits_{a\in A}[a]$。于是 $A\subseteq\bigcup\limits_{a\in A}[a]$。故 $\bigcup\limits_{a\in A}[a]=A$ 的确成立。 □

这个定理说明，集合 A 上的等价关系 E 确定 A 的一个分割，每个等价类就是一个分割块。因为每个元素的等价类对于已知的等价关系E来说是唯一确定的，所以这样的分割也是唯一确定的。反过来，如果已知集合 A 上的一个分割，是否可能确定 A 上的一个等价关系呢？答案是肯定的。

定理2 设 $\Pi=\{A_t|t\in T\}$ 是集合 A 的一个分割，则唯一地存在着 A 上的等价关系 E，使得 Π 正是由等价关系 E 导出的等价商集。

证 引进 A 上的关系 E 如下：$a\mathrm{E}b$ 的意思是指 A 的元素 a,b 属于 Π 的同一分割块 A_t。显然 E 具备自反性、对称性及传递性。因此，E 是 A 上的一个等价关系，并且每一等价类就是一个分割块。至此得知，存在着 A 上的等价关系E使 $\Pi=A/\mathrm{E}$。

还须检查唯一性。设 A 上的等价关系R同样适合 $\Pi=A/\mathrm{E}$。任取 $(a,b)\in\mathrm{E}$。于是 $a\mathrm{E}b$，即 a,b 属于 Π 同一分割块 A_t。但因为 $\Pi=A/\mathrm{E}=A/\mathrm{R}$，所以 $[a]_\mathrm{E}=A_t=[a]_\mathrm{R}$ 从而 $b\in[a]_\mathrm{R}$。即 $(a,b)\in\mathrm{R}$。这样我们得到了 $\mathrm{E}\subseteq\mathrm{R}$。同理得到 $\mathrm{R}\subseteq\mathrm{E}$。故 $\mathrm{R}=\mathrm{E}$。 □

上述两定理表明，等价类与分割块、等价商集与分割，两两在实质上是相同的概念。

例3 给定从非空集 X 到非空集 Y 的映射 $f:X\to Y$，又

$$\mathrm{E}=\{(a,b)\,|\,f(a)=f(b)\}$$

则 E 是 X 上的等价关系。元素 $a\in X$ 的等价类

$$[a]=\{x|aEx\}=\{x|x\in X, f(a)=f(x)\}$$

这就是说，在映射 f 下，像点相同的所有源点构成等价类。X 的等价商集

$$X/E=\{[a]|a\in X\}$$

由此可见，根据像点的异同把映射的始集 X 分割成块。在每一分割块中，任何两个元素的像点必相同；在不同的分割块中，任何两个元素的像点必相异。

§1.4 偏序集

定义1 (i) 集合上具备自反性及传递性的关系叫做**预序关系**。

(ii) 集合上具备自反性、反对称性及传递性的关系叫做**偏序关系**。

定义2 (i) 设 $\leqslant$ 是集合 A 上的预序关系。此时称 A 为**预序集**，记作 $(A,\leqslant)$。

(ii) 预序集 $(A,\leqslant)$ 叫做**偏序集**，意思是指，$\leqslant$ 是 A 上的偏序关系。

对于偏序集 $(A,\leqslant)$ 来说，A 的元素 a,b 未必能使 $a\leqslant b$，$b\leqslant a$ 之一成立。有一种属性优异的偏序集叫全序集。

定义3 满足下列可比性条件的偏序集 $(A,\leqslant)$ 叫做**全序集**，也叫做**链**。所谓可比性，意思是指，A 的任意元 a,b，或者适合 $a\leqslant b$，或者适合 $b\leqslant a$。在全序集 $(A,\leqslant)$ 中，$\leqslant$ 叫做集合 A 上的全序关系。

前节例1中的 R_1 便是 $\mathscr{P}(A)$ 上的偏序关系，换言之

$(\mathscr{P}(U), \subseteq)$是偏序集。

例1 设 R 是一切实数的集，$\leqslant$表示两个实数之间的小于或等于关系．则 $(\mathrm{R}, \leqslant)$是全序集。

偏序集$(A, \leqslant)$可以用哈斯（Hasse）图直观地表示。图中的每个黑点代表 A 的每个元素．在说明作图法之前，先规定如下的记号及用语．

（1） $a<b$是$a\leqslant b$且$a\neq b$的简写，读作a被b复盖或b复盖a。

（2） 当且仅当 $a<b$ 且 A 的任何元素 x 都不能使 $a<x$ 及$x<b$ 同时成立时，我们就说 a 被 b 直接复盖，也可以说 b 直接复盖a。

现在按照下列规则确定每个黑点在哈斯图中的位置，并确定哪两个点之间应该用线段直接连结起来。

哈斯图画法一．给定偏序集$(A, \leqslant)$，又 $a, b \in A$．当且仅当 a 被 b 直接复盖时，我们把点 a 放在点 b 之下，并且从点 a 画一条上升直线段直接到达 b 点。

当 a 被 b 直接复盖时，这种画法对点 a 及点 b 的位置限制过死，造成不便．因此往往略加变通，成为

哈斯图画法二 给定偏序集$(A, \leqslant)$，又 $a, b\in A$．当且仅当 a 被 b 直接复盖时，我们从点 a 作一条带箭头的射线指向点 b。至于点 a 与点 b 的位置则不加限制。

例2 设 A是正整数 1 至 6 的集合，$\leqslant$理解为正整数的整除。即 $m\leqslant n$ 的意思是指 m 整除 n。易知$(A, \leqslant)$是偏序集。图 1 及图 2 是用两种不同的画法得出的两个哈斯图。

定义4 设$(A, \leqslant)$是预序集。A 的元素 a 叫做 A 的 **最大元**，意思是指，对于每个 $b\in A$ 都有 $b\leqslant a$；A 的元素 a 叫做 A 的**最小元**，意思是指，对于每个 $b\in A$ 都有 $a\leqslant b$．若预序

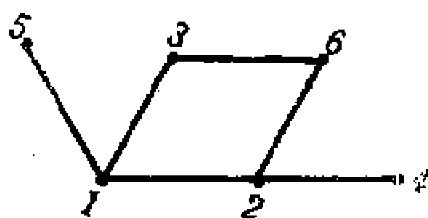


图1

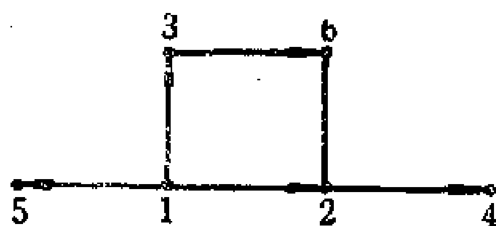


图2

集的最大元是唯一的，则用 1 表示之；若最小元是唯一的，则用 0 表示之。

定义5 设$(A,\leqslant)$是偏序集。A的元素 a 叫做 A 的极大元，意思是指每个 $b\in A$ 都不能使 $a<b$；A 的元素 a 叫做 A 的极小元，意思是指每个 $b\in A$ 都不能使 $b<a$。

显然，偏序集的最大元必是极大元，而极大元未必是最大元．但是，如果已知偏序集有最大元，则极大元必是最大元。此外，偏序集的最大元是唯一的，然而可能有多个极大元．对最小元及极小元也出现类似的情况．在偏序中，最小元必是极小元而极小元未必是最小元。但是，如果已知偏序集有最小元，则极小元必是最小元。此外，偏序集的最小元是唯一的，然而可能有多个极小元。

在前节例 1 的偏序集$(\mathscr{P}(U),\subseteq)$中，$A$ 是最大元，ϕ 是是最小元。

例3 给定 $A=\{a,\ b,\ c,\ d\}$。令

$$\leqslant=\{(a,a),\ (b,b),\ (c,c),\ (d,d),\ (a,b),\ (a,c)、(b,d),\ (a,d)\}.$$

则$(A,\leqslant)$是偏序集．其哈斯图见图3．c，d 是这个偏序集的极大元，但它没有最大元；a 是偏序集的最小元，因而也是

极小元。

定义6 给定偏序集$(A,\leqslant)$以及A的非空子集H。A的元素u叫做H的**上界**，意思是指任何$h\in H$都适合$h\leqslant u$；A的元素l叫做H的**下界**，意思是指任何$h\in H$都适合$l\leqslant h$。

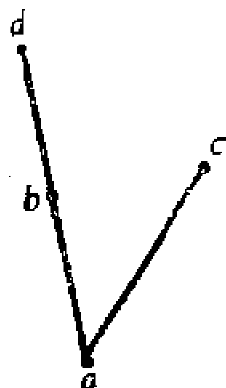


图3

定义7 给定偏序集$(A,\leqslant)$以及A的非空子集H. H的上界u_0叫做H的**最小上界**，也叫做H的上确界，意思是指H的任何上界u都适合$u_0\leqslant u$；H的下界l_0叫做H的**最大下界**，也叫做H的下确界，意思是指H的任何下界l都适合$l\leqslant l_0$。

在偏序集$(A,\leqslant)$中，非空子集H的上确界明显地是唯一的，记之为$\mathrm{Sup}H$；H的下确界也是唯一的，记之为$\mathrm{Inf}H$.

在例3中，令$H=\{b,c\}$，则H没有上界，因而也没有上确界；并且a是H的下界也是H的下确界. 令$K=\{a,b\}$，则b,d是K的上界，b是K的上确界；并且a是K的下界也是K的下确界。

例4 给定$A=\{a, b, c, d\}$. 设

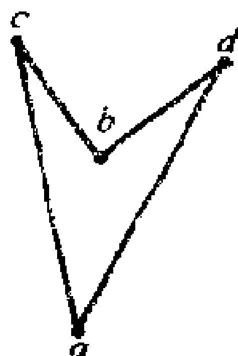


图4

$\leqslant=\{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,c), (a,d), (b,c), (b,d)\}$，则$(A,\leqslant)$是偏序集，其哈斯图见图4。令$H=\{[illegible],d\}$。则$H$没有上界；并且$a,b$都是$H$的下界但$H$没有下确界。令$K=\{a,b,d\}$。则$d$是$K$的唯一上界因而$d$是$K$的上确界；并

且K没有下界。

§1.5 格

一、格的两种等价定义

设$(A,\leqslant)$是偏序集。由A的每个元素x构成的集合都存在着唯一的上确界以及唯一的下确界，并且$x=\text{Sup}\{x\}=\text{Inf}\{x\}$。但上节例4告诉我们，$A$的两个元素构成的集合$\{x,y\}$却未必有上确界及下确界。针对这种情况，我们引进格的概念。

定义1 设A是非空集合而n是正整数。映射$f:A^n\to A$叫做集合A上的n元运算。已规定了n元运算的非空集合叫做**代数系**。

最常见的n元运算是二元运算及一元运算。为方便计，对于非空集合A上的二元运算$f:A\times A\to A$,依习惯把$f(a,b)$写为$a\circ b$；对A上的一元运算$f:A\to A$，把$f(a)$写为a^c。

定义2 偏序集$(A,\leqslant)$叫做**格**，意思是指，由L的任何两个元素构成的集合既有上确界也有下确界。

下面阐明格的主要性质。

定理1 设$(L,\leqslant)$是格。如果在L上规定二元运算$\vee$及$\wedge$，

$$a\vee b=\text{Sup}\{a,b\},\qquad a\wedge b=\text{Inf}\{a,b\}.$$

那么这两个二元运算满足如下算律。

(1) 幂等律 $a\vee a=a$，$a\wedge a=a$；

(2) 交换律 $a\vee b=b\vee a$，$a\wedge b=b\wedge a$；

(3) 结合律 $(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$，

$$(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c);$$

(4) 吸收律 $a\wedge(a\vee b)=a$, $a\vee(a\wedge b)=a$.

证 (1) $a\vee a=\operatorname{Sup}\{a,a\}=a$,

$$a\wedge a=\operatorname{Inf}\{a,a\}=a.$$

所以幂等律成立。

(2) $a\vee b=\operatorname{Sup}\{a,b\}=\operatorname{Sup}\{b,a\}=b\vee a$,

同理

$$a\wedge b=b\wedge a.$$

所以交换律成立。

(3) 令 $d=(a\vee b)\vee c$。于是

$a\vee b\leqslant d$ 且 $c\leqslant d$

$\Longrightarrow a\leqslant d$ 且 $b\leqslant d$ 且 $c\leqslant d$

$\Longrightarrow a\leqslant d$ 且 $b\vee c\leqslant d$

$\Longrightarrow a\vee(b\vee c)\leqslant d$

由此可见，d 是$\{a,b\vee c\}$的一个上界。设 u 是$\{a,b\vee c\}$的任一个上界。于是

$a\leqslant u$ 且 $b\vee c\leqslant u$

$\Longrightarrow a\leqslant u$ 且 $b\leqslant u$ 且 $c\leqslant u$

$\Longrightarrow a\vee b\leqslant u$ 且 $c\leqslant u$

$\Longrightarrow (a\vee b)\vee c\leqslant u$

$\Longrightarrow d\leqslant u$

由此可见，d 是 $\{a,b\vee c\}$ 的上确界，即

$$(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c).$$

同理

$$(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c).$$

所以结合律成立。

(4) 因为 $a\leqslant a$ 且 $a\leqslant a\vee b$，所以 a 是 $\{a,a\vee b\}$ 的一个下界。设 l 是 $\{a,a\vee b\}$ 的任一个下界，于是 $l\leqslant a$。故 a 是 $\{a,a\vee b\}$ 的下确界，即

$$a=a\wedge(a\vee b)$$

同理

$$a=a\vee(a\wedge b).$$

所以吸收律成立。 □

从相反的角度考察这个定理是有益的，为此先建立

引理 1 设非空集 L 上的二元运算 $\vee$ 及 $\wedge$ 满足如下算律。

(1) 幂等律 $a\vee a=a$，$a\wedge a=a$；

(2) 交换律 $a\vee b=b\vee a$，$a\wedge b=b\wedge a$；

(3) 结合律 $(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$，

$(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$；

(4) 吸收律 $a\wedge(a\vee b)=a$，$a\vee(a\wedge b)=a$。

则 $a\vee b=b$ 的充分必要条件是 $a\wedge b=a$。

证 设 $a\vee b=b$。于是 $a\wedge b=a\wedge(a\vee b)=a$。

反过来，设 $a\wedge b=a$。于是 $a\vee b=(a\wedge b)\vee b=b\vee(b\wedge a)=b$。 □

定理 2 设非空集 L 上的二元运算 $\vee$ 及 $\wedge$ 满足引理 1 中所说的幂等律、交换律、结合律以及吸收律。如果定义 L 上的关系 $\leqslant$ 为

$$a\leqslant b \Longleftrightarrow a\vee b=b$$

则 $(L,\leqslant)$ 成为格，并且 $\mathrm{Sup}\{a,b\}=a\vee b$，$\mathrm{Inf}\{a,b\}=a\wedge b$。

证 (i) 对任何 $a\in L$，因为 $a\vee a=a$ 所以 $a\leqslant a$，即 $\leqslant$ 具备自反性。

(ii) 设 $a\leqslant b$ 且 $b\leqslant a$。于是 $a\vee b=b$ 且 $b\vee a=a$。利用交换律得出

$$a=b\vee a=a\vee b=b$$

即$\leqslant$具备反对称性。

(iii) 设 $a\leqslant b$ 且 $b\leqslant c$。于是 $a\vee b=b$ 且 $b\vee c=c$。利用结合律得出

$$a\vee c=a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c$$
$$=b\vee c=c.$$

所以 $a\leqslant c$，即$\leqslant$具备传递性。

至此得知$(L,\leqslant)$是偏序集。

任取 $\{a,b\}\subseteq L$。因为 $a\vee(a\vee b)=a\vee b$ 且 $b\vee(a\vee b)=(a\vee b)\vee b=a\vee(b\vee b)=a\vee b$，所以 $a\vee b$ 是 $\{a,b\}$ 的一个上界。任取 $\{a,b\}$ 的上界 u，则 $a\leqslant u$ 且 $b\leqslant u$ 即 $a\vee u=u$ 且 $b\vee u=u$。因而

$$(a\vee b)\vee u=a\vee(b\vee u)=a\vee u=u,$$

即 $a\vee b\leqslant u$。由此可见，$a\vee b$ 是 $\{a,b\}$ 的上确界。换言之 $a\vee b=\mathrm{Sup}\{a,b\}$。

最后还要证明 $a\wedge b=\mathrm{Inf}\{a,b\}$。根据引理1，我们有

$$a\leqslant b\Longleftrightarrow a\wedge b=a$$

因为$(a\wedge b)\wedge a=a\wedge(a\wedge b)=(a\wedge a)\wedge b=a\wedge b$ 且 $(a\wedge b)\wedge b=a\wedge(b\wedge b)=a\wedge b$，所以 $a\wedge b$ 是 $\{a,b\}$ 的一个下界。任取 $\{a,b\}$ 的下界 l。则 $l\leqslant a$ 且 $l\leqslant b$。即$l\wedge a=l$ 且 $l\wedge b=l$。因而

$$l\wedge(a\wedge b)=(l\wedge a)\wedge b$$
$$=l\wedge b=l,$$

即 $l\leqslant a\wedge b$。由此可见，$a\wedge b$ 是 $\{a,b\}$ 的下确界。换言之，$a\wedge b=\mathrm{Inf}\{a,b\}$。 □

定义 3 设非空集 L 上的二元运算$\vee$及$\wedge$满足幂等、交换、结合、吸收四个算律．此时称 L 为格，记作$(L,\vee,\wedge)$。

上述定理 1 及定理 2 已从正反两个角度证明格的两种定义是等价的，可以随意选用。

二、完备格、分配格、基元格与有补格

定义 4 偏序集$(L,\leqslant)$叫做完备格，意思是指对任意非空子集 $H\subseteq L$ 必存在着 $\operatorname{Sup} H$ 及 $\operatorname{Inf} H$。

完备格$(L,\leqslant)$显然有最大元 1 及最小元 0，$\operatorname{Sup} L=1$，$\operatorname{Inf} L=0$。

定义 5 格$(L,\vee,\wedge)$叫做**分配格**，意思是指，对任何 $a,b,c\in L$，

(5) 分配律 $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$;

$$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$$

永远成立。

应该指出，在分配格的定义中，有些条件是多余的。

定理 3 在格$(L,\vee,\wedge)$中，如果运算$\wedge$对运算$\vee$可分配，则运算$\vee$对运算$\wedge$也可分配；反之，如果$\vee$对$\wedge$可分配，则$\wedge$对$\vee$也可分配。

证 设在格$(L,\vee,\wedge)$中，对任意 $a,b,c\in L$ 有

$$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$$

则

$$\begin{aligned}(a\vee b)\wedge(a\vee c)&=[(a\vee b)\wedge a]\vee[(a\vee b)\wedge c]\\&=a\vee[(a\wedge c)\vee(b\wedge c)]\\&=[a\vee(a\wedge c)]\vee(b\wedge c)\\&=a\vee(b\wedge c).\end{aligned}$$

这就是说，$\vee$对$\wedge$可分配。

同理可以证明定理的后半部分。 □

定义 6 有最大元及最小元的格叫做有基元的格；最大元及最小元统称**基元**。

对有基元的格来说，格的每个元素 a 永远满足

（6） 基元律 $0\vee a=a$，$0\wedge a=0$，

$a\vee 1=1$，$a\wedge 1=a$。

定义 7 给定有基元的格$(L,\vee,\wedge)$。设对每个 $a\in L$，存在着元素 $a^c\in L$ 使得

（7） 补元律 $a\vee a^c=1$，$a\wedge a^c=0$

永远成立。此时称这个格为有补格，称 a^c 为 a 的一个**补元**。

明显地，a^c 是 a 的补元等于说 a 是 a^c 的补元。

例 1 图 1 给出的格是有补格。a 是最大元，c 是最小元。c是 a 的补元；d 及 e 都是 b 的补元；a 是 c 的补元；b 是 d 的补元，b 也是 e 的补元。但是这个格并不满足分配律。事实上，

$$e\wedge(b\vee d)=e\wedge a=e$$

然而

$$(e\wedge b)\vee(e\wedge d)=c\vee d=d。$$

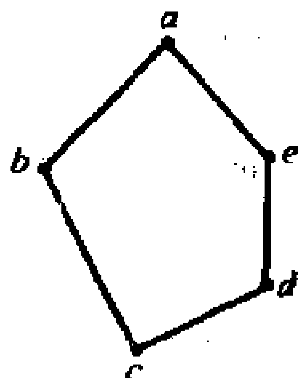


图1

在有补格中，规定每个元都有补元，但每个元的补元未必唯一。例 1 中的元素 b 便有两个补元。但这种情况绝对不能在有补分配格中出现。

定理 4 设$(L,\vee,\wedge)$是有补分配格，则 L 的每个元素的补元是唯一地存在的。

证 存在性是毫无疑问的，现证唯一性。设 L 的元素 a

具有补元 b 及 c 。即

$$\begin{cases} a \vee b = 1 \\ a \wedge b = 0 \end{cases} \quad 且 \begin{cases} a \vee c = 1 \\ a \wedge c = 0 \end{cases}.$$

于是

$$\begin{aligned} b = b \wedge 1 = b \wedge (a \vee c) \\ = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \\ = 0 \vee (b \wedge c) \\ = b \wedge c \end{aligned}$$

同法算出

$$c = b \wedge c$$

因此，$b = c$。 □

推论 在有补分配格中，下列两个算律均成立

(8) 复原律 $(a^c)^c = a$;

(9) 对偶律 $(a \vee b)^c = a^c \wedge b^c$,

$(a \wedge b)^c = a^c \vee b^c$.

证 因为已知 $a \vee a^c = 1$ 且 $a \wedge a^c = 0$。所以

$$a^c \vee a = a \vee a^c = 1 \text{ 且 } a^c \wedge a = a \wedge a^c = 0.$$

这等于说 a 是 a^c 的一个补元。但由于 a^c 的补元是唯一的，故 $(a^c)^c = a$。这便证明了复原律的正确性。同理证明对偶律的正确性。 □

§1.6 布尔代数及软代数

一 布尔代数的亨廷顿(Huntington)定理

定义 1 至少有两个元的有补分配格叫做**布尔格**，也叫做**布尔代数**。

回顾§1.1，可以断言，对任何非空集U，$(\mathscr{P}(U),\cup,\cap)$是完备的布尔代数。

布尔代数的最大元及最小元照例记作1及0．因为布尔代数的每个元素a必有唯一的补元a^c，所以求补元可以看成定义在布尔代数上的一元运算，记作^c，叫做补运算．布尔代数的通用简写是$(B,\vee,\wedge,^c,0,1)$。

谈谈上述定义的缺陷是值得的。设在非空集L上已规定了两个不相同的二元运算$\vee$及$\wedge$。这时L显然至少有两个不相同的元素，但是如果直接按照定义1判别代数系$(L,\vee,\wedge)$能否成为一个布尔代数，则手续相当烦琐，不得不逐条检查§1.5中提及的算律(1)—(7)。而这些算律却以隐蔽的方式包含着重复的部分。例如不难发现，幂等律可单独由吸收律导出．事实上，对每个$a\in L$，我们由吸收律直接得到

$$a\vee a=a\vee[a\wedge(a\vee a)]=a$$

及

$$a\wedge a=a\wedge[a\vee(a\wedge a)]=a.$$

由此可见，简化布尔代数的定义不无益处。

引理1 给定集合B上的二元运算$\wedge$，$\vee$以及一元运算^c，又B至少有两个不相同的元素，记之为0及1。如果交换律(2)，分配律(5)，基元律(6)，补元律(7)得到满足，那么对任何$a,b\in B$，都有

(i) $a\vee 1=1$；$a\wedge 0=0$。

(ii) $a\vee b=a\vee c$ 且 $a^c\vee b=a^c\vee c\Longrightarrow b=c$；

$a\wedge b=a\wedge c$ 且 $a^c\wedge b=a^c\wedge c\Longrightarrow b=c$。

证 (i)

$$a\vee 1=(a\vee 1)\wedge 1 \qquad \text{(基元律(6))}$$

$$=(a\vee 1)\wedge(a\vee a^c) \qquad \text{(补元律(7))}$$

$$=a\vee(1\wedge a^c) \qquad \text{(分配律(5))}$$

$$=a\vee(a^c\wedge 1) \qquad \text{(交换律(2))}$$

$$=a\vee a^c \qquad \text{(基元律(6))}$$

$$=1 \qquad \text{(补元律(7))}$$

同法推导余下的等式；等号下面的数字代表所用到的算律的编号。

$$a\wedge 0 \underset{(6)}{=} 0\vee(a\wedge 0) \underset{(7)}{=} (a\wedge a^c)\vee(a\wedge 0)$$

$$\underset{(5)}{=} a\wedge(a^c\vee 0) \underset{(2)}{=} a\wedge(0\vee a^c)$$

$$\underset{(6)}{=} a\wedge a^c \underset{(7)}{=} 0.$$

(ii) $(a\vee b)\wedge(a^c\vee b)$

$$\underset{(2)}{=} (b\vee a)\wedge(b\vee a^c)$$

$$\underset{(5)}{=} b\vee(a\wedge a^c)$$

$$\underset{(7)}{=} b\vee 0 \underset{(2)}{=} 0\vee b \underset{(6)}{=} b;$$

并且

$$(a\vee c)\wedge(a^c\vee c)$$

$$\underset{(2)}{=} (c\vee a)\wedge(c\vee a^c)$$

$$\underset{(5)}{=} c\vee(a\wedge a^c)$$

$$\underset{(7)}{=} c \vee 0 \underset{(2)}{=} 0 \vee c \underset{(6)}{=} c.$$

因而从已知条件 $a\vee b=a\vee c$ 及 $a^c\vee b=a^c\vee c$ 得出

$$b=(a\vee b)\wedge(a^c\vee b)$$

$$=(a\vee c)\wedge(a^c\vee c)=c.$$

类似地从已知条件 $a\wedge b=a\wedge c$ 及 $a^c\wedge b=a^c\wedge c$ 得出 $b=c$。□

定理 1 给定集合 B 上的二元运算 $\vee$，$\wedge$ 以及一元运算 ^{c}。又 B 至少有两个不相同的元素，记之为 0 及 1，如果交换律(2)，分配律(5)，基元律(6)，补元律(7)得到满足，那么 $(B,\vee,\wedge,{}^c,0,1)$ 成为一个布尔格。

证 首先

$$a\vee a\underset{(6)}{=}(a\vee a)\wedge 1$$

$$\underset{(7)}{=}(a\vee a)\wedge(a\vee a^c)$$

$$\underset{(5)}{=}a\vee(a\wedge a^c)$$

$$\underset{(7)}{=}a\vee 0\underset{(2)}{=}0\vee a\underset{(6)}{=}a.$$

类似地推出

$$a\wedge a=0.$$

于是，幂等律(1)是正确的。

其次，

$$a\vee(a\wedge b)\underset{(6)}{=}(a\wedge 1)\vee(a\wedge b)$$

$$\underset{(5)}{=}a\wedge(1\vee b)$$

$$\underset{(2)}{=} a\wedge(b\vee 1).$$

根据引理 1 (i)，$b\vee 1=1$。因此

$$a\vee(a\wedge b)=a\wedge 1 \underset{(6)}{=} a.$$

类似地推出

$$a\wedge(a\vee b)=a.$$

于是吸收律(4)是正确的。

为了证明结合律(3)，令 $g=a\vee(b\vee c)$，$h=(a\vee b)\vee c$。于是

$$a\wedge g=a\wedge[a\vee(b\vee c)] \underset{(4)}{=} a.$$

另外，

$$a\wedge h=a\wedge[(a\vee b)\vee c]$$

$$\underset{(5)}{=}[a\wedge(a\vee b)]\vee(a\wedge c)$$

$$\underset{(4)}{=} a\vee(a\wedge c) \underset{(4)}{=} a.$$

所以，

$$a\wedge g=a\wedge h.$$

不仅如此，

$$a^c\wedge g=a^c\wedge[a\vee(b\vee c)]$$

$$\underset{(5)}{=}(a^c\wedge a)\vee[a^c\wedge(b\vee c)]$$

$$\underset{(2)}{=}(a\wedge a^c)\vee[a^c\wedge(b\vee c)]$$

$$\underset{(7)}{=} 0\vee[a^c\wedge(b\vee c)]$$

$$\underset{(6)}{=} a^c\wedge(b\vee c)$$

$$\underset{(5)}{=}(a^c\wedge b)\vee(a^c\wedge c).$$

$$a^c\wedge h = a^c\wedge[(a\vee b)\vee c]$$

$$\underset{(5)}{=}[a^c\wedge(a\vee b)]\vee(a^c\wedge c)$$

$$\underset{(5)}{=}[(a^c\wedge a)\vee(a^c\wedge b)]\vee(a^c\wedge c)$$

$$\underset{(2)}{=}[(a\wedge a^c)\vee(a^c\wedge b)]\vee(a^c\wedge c)$$

$$\underset{(7)}{=}[0\vee(a^c\wedge b)]\vee(a^c\wedge c)$$

$$\underset{(6)}{=}(a^c\wedge b)\vee(a^c\wedge c)$$

所以

$$a^c\wedge g = a^c\wedge h.$$

根据引理1(ii)，由 $a\wedge g = a\wedge h$ 及 $a^c\wedge g = a^c\wedge h$ 得出 $g = h$，即

$$a\vee(b\vee c) = (a\vee b)\vee c.$$

同理推导

$$a\wedge(b\wedge c) = (a\wedge b)\wedge c.$$

于是结合律(3)是正确的。

最后，已知的两个特殊元素1及0显然就是 B 的最大元及最小元。因此，$(B,\vee,\wedge,^c,0,1)$ 是布尔代数。 □

这是著名的亨廷顿定理。根据它检查集合 B 是不是一个布尔代数远较根据定义1省事。

二、一个特殊的软代数

定义 2 给定有基元的分配格$(L,\vee,\wedge)$，设其中已规定一元运算

$$^c: L\to L, \quad a\longmapsto a^c$$

满足复原律及对偶律。此时称这个格为**软代数**。

§1.5 定理 4 的推论指出，布尔代数必是软代数。但其逆未必真，请看

例 1 设在实数的闭区间$[0,1]$上定义了二元运算$\vee$，$\wedge$及一元运算^c：

$$x\vee y=\mathrm{Max}\{x,y\},$$
$$x\wedge y=\mathrm{Min}\{x,y\},$$
$$x^c=1-x.$$

易知代数系$([0,1],\vee,\wedge,^c)$是有基元的分配格，最大元是正整数 1，最小元是整数 0；且满足复原律及对偶律。因此这个代数系是一个软代数。然而它并非布尔代数。

事实上，只要令$x\in(0,1)$，则任何$y\in[0,1]$都不能使$x\vee y=1$及$x\wedge y=0$同时成立，即x没有补元。

这个代数系$([0,1],\vee,\wedge,^c)$是具有特殊意义的软代数。为了进一步说明它的代数结构，我们谈谈闭区间$[0,1]$的完备性。

引理 2 实数闭区间$[0,1]$的每个非空子集X都存在着唯一的最小上界，也存在着唯一的最大下界。

证 对有限集合X，引理 2 自动成立。因此我们只针对无限集X进行讨论。首先考虑最小上界。

令$a_1=0$，$b_1=1$。取$I_1=[a_1,b_1]$。

如果I_1的中点c_1是集合X的上界，则令$a_2=a_1,b_2=c_1$；

否则令 $a_2=c_1$，$b_2=b_1$。取 $I_2=[a_2,b_2]$。

如果 I_2 的中点 c_2 是集合 X 的上界，则令 $a_3=a_2, b_3=c_2$；否则令 $a_3=c_2$，$b_3=b_2$。取 $I_3=[a_3,b_3]$。

……

如此继续下去，我们得到闭区间套

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$$

每个闭区间$[a_n,b_n]$具有如下性质

(i) $[a_n,b_n]$的长度等于 $\frac{1}{2^{n-1}}$。

(ii) a_n 不是集合 X 的上界但 b_n 是集合 X 的上界。因而存在 $x_n\in X$ 使 $a_n<x_n<b_n$。

根据闭区间套原理，上述闭区间套收缩为一点 u，a_n 单调递增趋于 u，b_n 单调递减趋于 u。由于每个 $x\in X$ 都适合 $x\leqslant b_n$，所以令 $n\to+\infty$ 便得出 $x\leqslant u$。由此可见，u 是集合 X 的一个上界。现在任取 X 的上界 v。因为每个 x_n 都适合 $a_n<x_n$ 而 $x_n\leqslant v$，于是 $a_n<v$。仍令 $n\to+\infty$ 便得出 $u\leqslant v$。这意味着 u 是集合 X 的最小上界。X 的最小上界显然是唯一的。

同法证明实数闭区间$[0,1]$的每个无限子集 X 也存在着唯一的最大下界。 □

回顾例1。立刻断言$([0,1],\vee,\wedge,^c)$是完备的软代数。

今后，把引理2所提到的非空子集$X\subseteq[0,1]$的最小上界及最大下界分别记作 $\bigvee\limits_{x\in X}x$ 及 $\bigwedge\limits_{x\in X}x$。

引理3 给定 $a\in[0,1]$ 以及 $a_t\in[0,1]$，$t\in T\neq\phi$。则以下结论均成立。

1. $a\vee(\bigwedge_{t\in T} a_t)=\bigwedge_{t\in T}(a\vee a_t)$,

$a\wedge(\bigvee_{t\in T} a_t)=\bigvee_{t\in T}(a\wedge a_t)$;

2. $(\bigvee_{t\in T} a_t)^c=\bigwedge_{t\in T} a_t^c$,

$(\bigwedge_{t\in T} a_t)^c=\bigvee_{t\in T} a_t^c$.

证 对 $\forall t\in T$，有 $a\vee(\bigwedge_{t\in T} a_t)\leqslant a\vee a_t$。于是 $a\vee(\bigwedge_{t\in T} a_t)\leqslant \bigwedge_{t\in T}(a\vee a_t)$；我们现证其中的等号必成立。使用反证法，假如 $a\vee(\bigwedge_{t\in T} a_t)<\bigwedge_{t\in T}(a\vee a_t)$的话，则存在 $b\in[0,1]$使

$$a\vee(\bigwedge_{t\in T} a_t)<b<\bigwedge_{t\in T}(a\vee a_t).$$

由右边的不等式知，任何 $t\in T$ 均适合 $b<a\vee a_t$。分别处理两种情况。

第一种情况 $b<a$。此时 $a\leqslant a\vee(\bigwedge_{t\in T} a_t)<b$。前后矛盾。

第二种情况 $b\geqslant a$。此时对任何 $t\in T$ 均有 $b<a_t$。于是 $b\leqslant\bigwedge_{t\in T} a_t$。然而 $\bigwedge_{t\in T} a_t\leqslant a\vee(\bigwedge_{t\in T} a_t)<b$。前后也矛盾。

总之，等号的确成立，即

$$a\vee(\bigwedge_{t\in T} a_t)=\bigwedge_{t\in T}(a\vee a_t).$$

同法证明其余三个等式。 □

这个引理把软代数$([0,1],\vee,\wedge,^c)$的分配律及对偶律推广为一般形式，当指标集 $T=\{1,2\}$ 时，引理3便蜕化为平常的分配律及对偶律。

§1.7 特征函数系的代数结构

一、同态与同构

在§1.2中讨论映射 $f: X \to Y$ 时，未涉及始集 X 与终集 Y 的数学结构。本节把映射 f 同 X，Y 的代数结构揉合起来，引进代数系的同态与同构这两个重要概念。

定义 1 设在非空集合 X，Y 上分别给定了二元运算 $\cdot$ 及 $\circ$。

(i) 我们说映射 $\sigma: X \to Y$ **保持运算**，意思是指对任何 x_1，$x_2 \in X$，等式

$$\sigma(x_1 \cdot x_2) = \sigma(x_1) \circ \sigma(x_2)$$

永远成立。此时也称 σ 是从 X 到 Y 的、关于代数运算 $\cdot$ 及 $\circ$ 的同态映射，或称 σ 是从代数系$(X, \cdot)$到代数系$(Y, \circ)$的**同态映射**。

(ii) 具有满性的同态映射 $\sigma: X \to Y$ 简称**满同态**；此时 $Y = \sigma(X)$叫做 X 在此同态满射下的像。

例 1 已知 R 是所有实数的集。取 $X = Y = $ 5，又 R 上的二元运算是普通乘法。考察映射 $\sigma: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$。

(i) 设 $\sigma(x) = |x|$。由于

$$\sigma(x_1 \cdot x_2) = |x_1 x_2| = |x_1| \cdot |x_2| = \sigma(x_1) \cdot \sigma(x_2),$$

故 σ 是从(R，$\cdot$)到(R，$\cdot$)的同态映射，但不是满同态。

(ii) 另设 $\sigma(x) = kx$，k 是既非 0 也非 1 的常数。当 $x_1 \neq 0$ 且 $x_2 \neq 0$ 时，由于

$$\sigma(x_1 \cdot x_2) = k(x_1 \cdot x_2)$$

$$\neq k(x_1)\cdot k(x_2)=\sigma(x_1)\cdot\sigma(x_2),$$

故σ不是从$(\mathbb{R}, \cdot)$到$(\mathbb{R}, \cdot)$的同态映射。

定义 2 (i)同时具备单性及满性的同态映射叫做**同构映射**。

(ii) 设代数系$(X, \cdot)$与$(Y, \circ)$之间存在着关于$\cdot$及$\circ$的同构映射，则称这两个代数系同构，记作$(X, \cdot)\cong(Y, \circ)$。

类似地，如果两代数系是定义了多个代数运算的，例如代数系$(X, \cdot, *)$，$(Y, \circ, \circledast)$，其间存在着关于$\cdot$，$*$及$\circ$，$\circledast$的同态映射，即等式

$$\sigma(x_1\cdot x_2)=\sigma(x_1)\circ\sigma(x_2)$$

$$\sigma(x_1 * x_2)=\sigma(x_1)\circledast\sigma(x_2)$$

对任何x_1，$x_2\in X$均成立，则称这两个代数系**同构**，记作$(X, \cdot, *)\cong(Y, \circ, \circledast)$。

二、代数系$(Ch(U), \vee, \wedge, {}^c, \chi_\phi, \chi_U)$

考察论域U上的幂集$\mathscr{P}(U)$，我们在上节中已说明$(\mathscr{P}(U), \cup, \cap, {}^c, \phi, U)$是一个完备的布尔代数。令$U$上的所有特征函数$\chi: U\to\{0, 1\}$构成集合$Ch(U)$，按§1.2所述，映射$\sigma: \mathscr{P}(U)\to Ch(U)$，$A\longmapsto\chi_A$明显地具有单满性。此外，$\sigma(\phi)=\chi_\phi$，$\sigma(U)=\chi_U$分别就是恒等于0以及恒等于1的函数。不仅如此，利用双射σ还可以在$Ch(U)$中引进运算$\vee$，$\wedge$，^{c}，使得集合$Ch(U)$转变为一个代数系$(Ch(U), \vee, \wedge, {}^c, \chi_\phi, \chi_U)$。办法是对任何$\chi_A$，$\chi_{A^{(t)}}\in Ch(U)$，$t\in T\neq\phi$，定义

$$\bigvee_{t\in T}\chi_{A^{(t)}}=\sigma\left(\bigcup_{t\in T}A^{(t)}\right), \tag{1}$$

$$\bigvee_{t\in T} \chi_{A^{(t)}} = \sigma(\bigcap_{t\in T} A^{(t)}), \tag{2}$$

$$(\chi_A)^c = \sigma(A^c). \tag{3}$$

极为明显，对任何$u\in U$，

$$\chi_{\bigcup\limits_{t\in T} A^{(t)}}(u) = 1$$

$$\Longleftrightarrow u\in \bigcup_{t\in T} A^{(t)}$$

$$\Longleftrightarrow \exists t_0\in T \text{ 使 } u\in A^{(t_0)}$$

$$\Longleftrightarrow \exists t_0\in T \text{ 使 } \chi_{A^{(t_0)}}(u) = 1$$

$$\Longleftrightarrow \bigvee_{t\in T} \chi_{A^{(t)}}(u) = 1.$$

因此

$$\chi_{\bigcup\limits_{t\in T} A^{(t)}}(u) = \bigvee_{t\in T} \chi_{A^{(t)}}(u).$$

同理推出

$$\chi_{\bigcap\limits_{t\in T} A^{(t)}}(u) = \bigwedge_{t\in T} \chi_{A^{(t)}}(u).$$

另外，由式(3)得

$$(\chi_A)^c(u) = (\sigma(A)^c)(u) = \chi_{A^c}(u),$$

于是根据§1.2最后的等式推出

$$(\chi_A)^c(u) = 1 - \chi_A(u).$$

定理1 完备的布尔代数$(\mathscr{P}(U),\ \cup,\ \cap,\ ^c,\ \phi,\ U)$

与代数系$(Ch(U),\ \vee,\ \wedge,\ ^c,\ \chi_\phi,\ \chi_U)$同构.

证 刚才已谈到映射

$$\sigma:\ \mathscr{P}(U)\to Ch(U),\qquad A\longmapsto \chi_A,$$

的单满性，并且$\sigma(\phi)=\chi_\phi$，$\sigma(U)=\chi_U$. 把式(1)，(2)，(3)改写一下；对任何非空指标T，有

$$\sigma(\bigcup_{t\in T}A^{(t)})=\bigvee_{t\in T}\chi_{A^{(t)}}=\bigvee_{t\in T}\sigma(A^{(t)}),$$

$$\sigma(\bigcap_{t\in T}A^{(t)})=\bigwedge_{t\in T}\chi_{A^{(t)}}=\bigwedge_{t\in T}\sigma(A^{(t)}),$$

$$\sigma(A^c)=(\chi_A)^c=(\sigma(A))^T.$$

由此可见，双射σ保持所有运算. 从而

$$(\mathscr{P}(U),\ \cup,\ \cap,\ ^c,\ \phi,\ U)\cong(Ch(U),\ \vee,\ \wedge,\ ^c,\ \chi_\phi,\ \chi_U).\qquad\square$$

根据这个定理，$(\mathscr{P}(U),\ \cup,\ \cap,\ ^c,\ \phi,\ U)$与$(Ch(U),\ \vee,\ \wedge,\ ^c,\ \chi_\phi,\ \chi_U)$是相同的完备布尔代数. $\mathscr{P}(U)$是以普通集合为元素的直观图式，$Ch(U)$是抽象的代数系. $Ch(U)$虽不及$\mathscr{P}(U)$直观，但便于进行更一般的讨论. 下章将利用$Ch(U)$直接引进 Fuzzy 集合的概念.

第二章 Fuzzy集合

§ 2.1 Fuzzy集合的基本概念

在论域U上，元素$u\in U$与普通集合$A\in\mathscr{P}(U)$之间的联系完全符合二值逻辑的要求。要么$u\in A$，这时特征函数值$\chi_A(u)=1$，要么$u\notin A$，这时特征函数值$\chi_A(u)=0$；两者必居其一且仅居其一。因此普通集合以及特征函数适用于表述非此即彼的清晰概念。但是人们对客观事物的认识并不仅使用二值逻辑，除了处理非此即彼的清晰概念之外，还要面对亦此亦彼的模糊概念。

例如"比0大的所有实数"，这是一个清晰概念，它的外延用普通集合

$$A=\{x|x>0\}$$

表示。它指出凡大于0的实数都是A的成员，尽管A的元素无法一一列举，但范围是完全确定的。

若将上述概念改为"比0大得多的所有实数"，这就变成一个模糊概念了。人们无法划出严格分明的界限，使得在此界限内的实数都比0大得多，而其它实数都并非比0大得多。人们只能说某实数比0大得多的程度高，另一实数比0大得多的程度低。例如10^{10}比0大得多的程度高于10^{9}比0大得多的程度。总之，对模糊概念而言，不能仿照清晰概念只用属于或不属于来确定它的所有成员。

第一章已指出了布尔代数$(\mathscr{P}(U),\ \cup,\ \cap,\ ^c,\ \phi,\ U)$与$(Ch(U),\ \vee,\ \wedge,\ ^c,\ 0,\ 1)$之间的同构关系。用特征函

数 χ_A 表示普通集合 A 的要点是特征函数只取0，1二值。

$$\chi_A(u)=\begin{cases}1 & \text{当 } u\in A\\ 0 & \text{当 } u\notin A.\end{cases}$$

而模糊概念允许在属于与不属于之间存在中介状态。扎德(Zadeh)推广了以特征函数表示普通集合的方法，用隶属函数表示 Fuzzy 集合。所谓隶属函数是指从论域 U 到闭区间[0，1]的映射 μ，

$$\mu: U\to[0,\ 1].$$

这里，$\mu(u)$ 可取0，1之间的任何值。

定义1 设在论域 U 上给定映射 μ，

$$\mu: U\to[0,\ 1]$$

则说 μ 确定了 U 上的一个 Fuzzy 集合 A，μ 叫做 A 的隶属函数，亦写作 μ_A，$\mu_A(u)$ 叫做 u 对 A 的**隶属度**，它表示 u 属于 A 的程度。U 上的 Fuzzy 集合简称 Fuzzy 集。

当 $\mu_A(u)=1$ 时，则 u 完全属于 Fuzzy 集 A，当 $\mu_A(u)=0$ 时，则 u 完全不属于 A。$\mu_A(u)$ 越接近于1，u 属于 A 的程度就越大。因此，隶属函数可视为特征函数的一般化。相应地 Fuzzy 集可视为普通集的一般化。为简便计，约定

$$\mu_A(u)=\underset{\sim}{A}(u)\ \text{或}\ \mu_A=\underset{\sim}{A}.$$

例1 已知论域为实数集 $\mathbf{R}$。设 $\underset{\sim}{A}$ 是"比0大得多的所有实数"。A 就是论域 $\mathbf{R}$ 上的一个 Fuzzy 集，$A: \mathbf{R}\to[0,\ 1]$，(图1)。$x\in\mathbf{R}$ 关于 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度为

$$A(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ \dfrac{1}{1+\dfrac{100}{x^2}} & x>0\end{cases}$$

若$x_1\leqslant 0$，则$A(x_1)=0$，故x_1不属于A，即小于或等于0的数并非"比0大得多的实数"。

若$x_2=10$，则$A(x_2)=0.5$．故10属于"比0大得多的实数的程度是50%。

若$x_3=100$，则$A(x_3)=0.99\%$，故100属于"比0大得多的实数"的程度是99%。

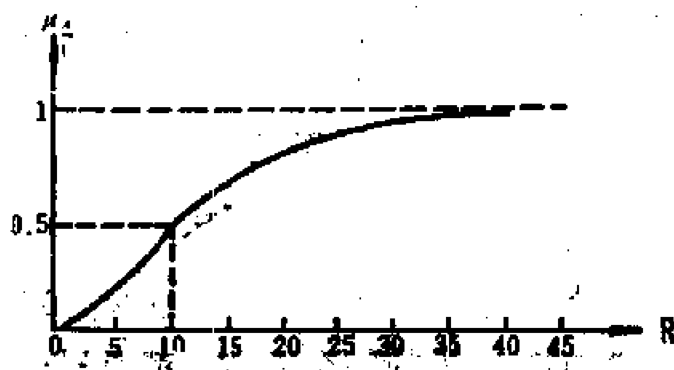


图 1

例2 "年轻"和"年老"是两个模糊概念．可用Fuzzy集来描述它们．取年龄论域$U=[0, 200]$，设描述"年轻"和"年老"的这两个Fuzzy集分别为Y和O．年龄u属于Y及O的隶属度分别为(图2)

$$
Y(u)=\begin{cases}1 & 0\leqslant u\leqslant 25\\ \left[1+\left(\dfrac{u-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1} & 25<u\leqslant 200.\end{cases}
$$

$$
O(u)=\begin{cases}0 & 0\leqslant u\leqslant 50\\ \left[1+\left(\dfrac{u-25}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & 50<u\leqslant 200.\end{cases}
$$

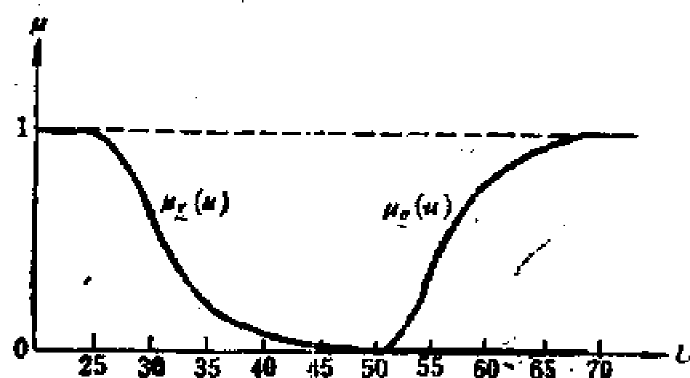


图 2

$Y(23)=1$，$O(80)=0.97$，这意味着23岁属于"年轻"的程度为100%，80岁属于"年老"的程度为97%。

例3 已知论域U的每个元素u都是以一条光滑封闭曲线为周界的平面图形。图形u的面积及周长分别记作$S(u)$及$l(u)$。设A是"所有圆块块"，A就是论域U上的一个Fuzzy集，$A:U\to[0,1]$，$u\in U$对A的隶属度

$$
\underset{\sim}{A}(u)=\frac{4\pi S(u)}{l^2(u)}.
$$

由上式可见，当u是圆时，$\underset{\sim}{A}(u)=1$，当u不是圆时，

$A(u)<1$.

在给定的论域 U 上，可以有形形色色的Fuzzy集，记U上的Fuzzy集的全体为$\mathscr{F}(U)$，即

$$\mathscr{F}(U)=\left\{A \mid A: U\to[0,1]\right\}.$$

称$\mathscr{F}(U)$为U上的Fuzzy幂集。

若$\forall u\in U$，$A(u)=0$，则A称为空集ϕ；若$\forall u\in U$，$A(u)=1$，则A称为全集U。显然

$$\mathscr{P}(U)\subset\mathscr{F}(U).$$

即任一个普通集都可视为一个Fuzzy集。留意，$\mathscr{F}(U)$的每个元A是U上的Fuzzy集，但$\mathscr{F}(U)$本身却是一个普通集。

Fuzzy集A的具体表达方式有若干种：

（一） 当U为有限集$\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$时，通常有如下三种方式：

（a） 扎德表示法

$$A=\frac{A(u_1)}{u_1}+\frac{A(u_2)}{u_2}+\cdots+\frac{A(u_n)}{u_n},$$

其中$\frac{A(u_i)}{u_i}$并非分数，而是表示论域中的元素u_i及其隶属度$A(u_i)$之间的对应关系，十也并非加法而是把Fuzzy集A看作一个整体。

例4 设$U=\{1, 2, \cdots, 6\}$，$A\in\mathscr{F}(U)$，隶属度$A(u_i)$如下：

$$\underset{\sim}{A}(1)=0,\quad \underset{\sim}{A}(2)=0.2,$$

$$\underset{\sim}{A}(3)=0.8,\quad \underset{\sim}{A}(4)=1,$$

$$\underset{\sim}{A}(5)=0.8,\quad \underset{\sim}{A}(6)=0.2.$$

则将$\underset{\sim}{A}$表示为

$$\underset{\sim}{A}=\frac{0}{1}+\frac{0.2}{2}+\frac{0.8}{3}+\frac{1}{4}+\frac{0.8}{5}+\frac{0.2}{6}$$

$$=\frac{0.2}{2}+\frac{0.8}{3}+\frac{1}{4}+\frac{0.8}{5}+\frac{0.2}{6}$$

隶属度为0的项无妨不记入。$\underset{\sim}{A}$可解释为“靠近4的整数”，记作$\underset{\sim}{4}$，(图3)

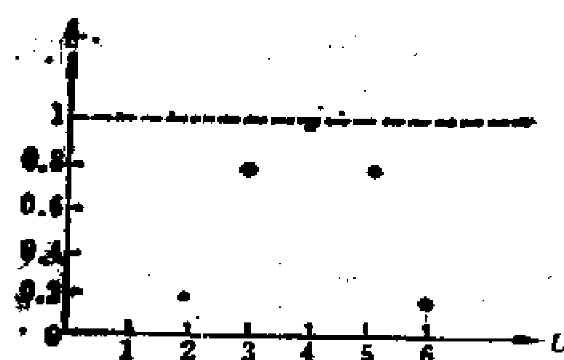


图 3

(*b*) 序偶表示法

$$\underset{\sim}{A}=\{(u_1,\ \underset{\sim}{A}(u_1)),\ (u_2,\ \underset{\sim}{A}(u_2)),\ \cdots,\ (u_n,\ \underset{\sim}{A}(u_n))\}.$$

例4中的$\underset{\sim}{A}$可表示为

$$\underset{\sim}{A}=\{(1,\ 0),\ (2,\ 0.2),\ (3,\ 0.8),\ (4,\ 1)\ (5,\ 0.8),\ (6,\ 0.2)\}$$

或

$$\underset{\sim}{A}=\{(2,\ 0.2),\ (3,\ 0.8),\ (4,\ 1),\ (5,\ 0.8),\ (6,\ 0.2)\}$$

(c) 向量表示法

$$\underset{\sim}{A}=(\underset{\sim}{A}(u),\quad \underset{\sim}{A}(u_2),\ \cdots,\ \underset{\sim}{A}(u_n)).$$

例4中的$\underset{\sim}{A}$可表为

$$\underset{\sim}{A}=(0,\ 0.2,\ 0.8,\ 1,\ 0.8,\ 0.2)$$

为了不在外观上改变向量的维数，隶属度为0的项不宜在向量中舍弃。

有时为了方便起见，将(a)，(b)，(c)几种表示法结合起来写成

$$\underset{\sim}{A}=\left(\frac{\underset{\sim}{A}(u_1)}{u_1},\ \frac{\underset{\sim}{A}(u_2)}{u_2},\ \cdots,\ \frac{\underset{\sim}{A}(u_n)}{u_n}\right).$$

例4中的$\underset{\sim}{A}$可表为

$$\underset{\sim}{A}=\left(\frac{0}{1},\ \frac{0.2}{2},\ \frac{0.8}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{0.8}{5},\ \frac{0.2}{6}\right).$$

(二) 当U是实数轴、区间或其它情况时，扎德使用记法

$$\underset{\sim}{A}=\int_U\frac{\underset{\sim}{A}(u)}{u}.$$

如例4中的$\underset{\sim}{A}$可表为

$$\underset{\sim}{A}=\int_{u<0}\frac{0}{u}+\int_{u>0}\frac{\dfrac{1}{1+\dfrac{100}{u^2}}}{u}=\int_{u>0}\frac{\dfrac{1}{1+\dfrac{100}{u^2}}}{u}.$$

同样$\frac{\underset{\sim}{A}(u)}{u}$并不表示分数，它表示论域中的元素 u 与隶属度 $\underset{\sim}{A}(u)$之间的对应关系；$\int$也不表示积分，而是表示论域 U 中的元素 u 与隶属度 $\underset{\sim}{A}(u)$对应关系的一个总结。

当论域为实数集 **R** 时，常用下面三种标准函数作为Fuzzy集的隶属函数。

（1） S 函数（偏大型隶属函数，见图 4 ）

$$S(u;a,b)=\begin{cases}0 & u\leqslant a\\ 2\left(\dfrac{u-a}{b-a}\right)^2 & a<u\leqslant\dfrac{a+b}{2}\\ 1-2\left(\dfrac{u-b}{b-a}\right)^2 & \dfrac{a+b}{2}<u\leqslant b\\ 1 & u>b\end{cases}$$

对于指定的参数 a，b 来说，$S(u;a,b)$是 u 的单调递增连续函数，并且 $S\left(\dfrac{a+b}{2};a,b\right)=\dfrac{1}{2}$。例如模糊集“年老”的隶属函数可表示为

$$\underset{\sim}{A}(u)=S(u;\ 50,\ 70).$$

（2） Z 函数（偏小型隶属函数，见图 5 ）

$$Z(u;\ a,\ b)=1-S(u;\ a,\ b)$$

对于指定的参数 a, b 来说，$Z(u;\ a,\ b)$是 u 的单调递减连

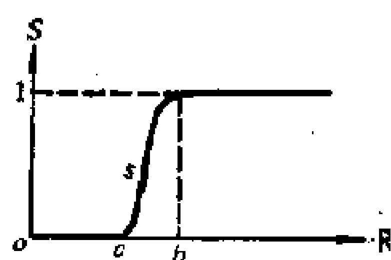


图 4

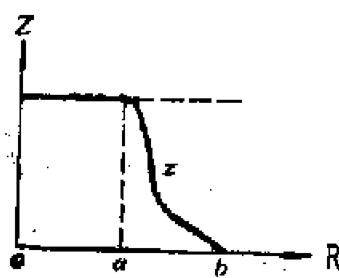


图 5

续函数，并且 $Z\left(\frac{a+b}{2};\ a,\ b\right)=\frac{1}{2}$。例如 Fuzzy 集"年轻"的隶属函数可表示为

$$\underset{\sim}{B}(u)=Z(u;\ 25,\ 50)$$

(3) Π 函数(中间型隶属函数，见图 6)

$$\Pi(u;\ a,\ b)=\begin{cases} S(u;\ b-a,\ b) & u\leqslant b \\ Z(u;\ b,\ b+a) & u>b \end{cases}$$

对于指定的参数 a, b 来说，$\Pi(u;\ a,\ b)$是 u 的连续函数，且 $\Pi(b;\ a,\ b)=1$；当 $u\leqslant b$ 时，$\Pi(u;\ a,\ b)$单调增加，当 $u\geqslant b$ 时，$\Pi(u;\ a,\ b)$单调减少；$\Pi(u;\ a,\ b)$关于 $u=b$ 是对称的。例如 Fuzzy 集"中年"的隶属函数可表示为

$$\underset{\sim}{C}(u)=\Pi(u;\ 10,\ 40)$$

§2.2 Fuzzy 集合的运算

一、Fuzzy 集合的并、交、补

在 §1.2 中用特征函数处理了普通集的运算$\cap$，$\cup$，^{c}。

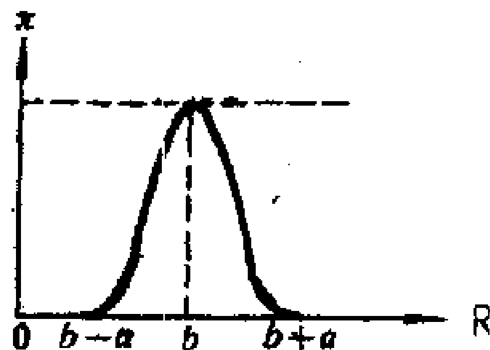


图 6

类似地，现在用隶属函数定义 Fuzzy 集的运算。

定义1. 给定$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(U)$。设$\forall u\in U$，$\underset{\sim}{B}(u)\leqslant\underset{\sim}{A}(u)$，则称$\underset{\sim}{A}$包含$\underset{\sim}{B}$。记作$\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{A}$。

定义2. 给定$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(U)$.设$\forall u\in U$，$\underset{\sim}{A}(u)=\underset{\sim}{B}(u)$，则称$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$相等，记作$\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{B}$。

易知，$\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{B}\Longleftrightarrow\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}$且$\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{A}$。

此外，包含关系$\subseteq$是Fuzzy幂集$\mathscr{F}(U)$上的二元关系，且符合偏序的条件。因为

(i) $\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{A}$，

(ii) $\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}$且$\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{A}\Longrightarrow\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{B}$，

(iii) $\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}$且$\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{C}\Longrightarrow\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{C}$；

因此$(\mathscr{F}(U),\subseteq)$是偏序集。由于$\phi,U\in\mathscr{F}(U)$，故$\mathscr{F}(U)$具有最大元$U$及最小元$\phi$。

定义3 给定$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{C}\in\mathscr{F}(U)$。

(i) 设$\forall u\in U$，$\underset{\sim}{C}(u)=\underset{\sim}{A}(u)\vee\underset{\sim}{B}(u)$.则称$\underset{\sim}{C}$为$\underset{\sim}{A}$与

$\underset{\sim}{B}$的并集，记作$\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}$。

(ii) 设 $\forall u \in U$，$\underset{\sim}{C}(u) = \underset{\sim}{A}(u) \wedge \underset{\sim}{B}(u)$.则称$\underset{\sim}{C}$为$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$的交集，记作$\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$。

定义4 给定$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B} \in \mathscr{F}(U)$。设$\forall u \in U$，$\underset{\sim}{B}(u) = 1 - \underset{\sim}{A}(u)$.则称为$\underset{\sim}{A}$的补集，记作$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{A}^c$。

任给a，$b \in [0, 1]$，由于$0 \leqslant a \vee b \leqslant 1$，$0 \leqslant a \wedge b \leqslant 1$及$0 \leqslant 1 - a \leqslant 1$，所以对$\forall \underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B} \in \mathscr{F}(U)$，$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{A}^c$恒存存。

这些定义的几何形象见图1。

例1 设$U = \{u_1, u_2 \cdots, u_5\}$，$\underset{\sim}{A} = \frac{0.2}{u_1} + \frac{0.7}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{0.8}{u_4} + \frac{0.3}{u_5}$及$\underset{\sim}{B} = \frac{0.7}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{0.1}{u_3} + \frac{1}{u_4} + \frac{0.6}{u_5}$.

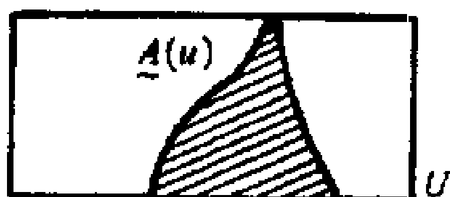
$$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} = \frac{0.2 \vee 0.7}{u_1} + \frac{0.7 \vee 1}{u_2} + \frac{1 \vee 0.1}{u_3} + \frac{0.8 \vee 1}{u_4} + \frac{0.3 \vee 0.6}{u_5}$$

$$= \frac{0.7}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} + \frac{0.6}{u_5}$$

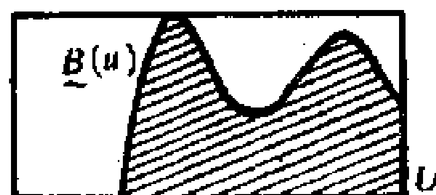
$$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = \frac{0.2 \wedge 0.7}{u_1} + \frac{0.7 \wedge 1}{u_2} + \frac{1 \wedge 0.1}{u_3} + \frac{0.8 \wedge 1}{u_4} + \frac{0.3 \wedge 0.6}{u_5}$$

$$= \frac{0.2}{u_1} + \frac{0.7}{u_2} + \frac{0.1}{u_3} + \frac{0.8}{u_4} + \frac{0.3}{u_5}$$

$$\underset{\sim}{A}^c = \frac{1-0.2}{u_1} + \frac{1-0.7}{u_2} + \frac{1-1}{u_3} + \frac{1-0.8}{u_4} + \frac{1-0.3}{u_5}$$



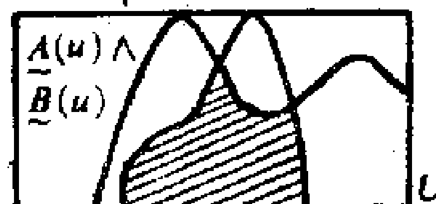
(a) $\underset{\sim}{A}$



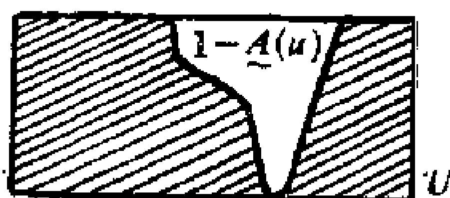
(b) $\underset{\sim}{B}$



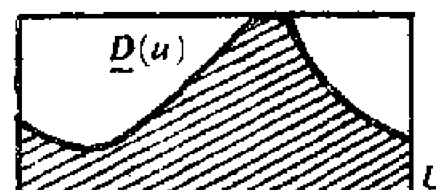
(c) $\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}$



(d) $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$



(e) $\underset{\sim}{A}^c$



(f) $\underset{\sim}{D}$



(g) $\underset{\sim}{A} \subseteq \underset{\sim}{D}$

图 1

$$= \frac{0.8}{u_1} + \frac{0.3}{u_2} + \frac{0.2}{u_4} + \frac{0.7}{u_5}$$

定理 1 $(\mathscr{F}(U), \cup, \cap, ^c)$具有性质

(1) 幂等律 $\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}$;

(2) 交换律 $\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{A}$;

(3) 结合律 $(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) \cup \underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \cup (\underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{C})$,

$(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \cap \underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \cap (\underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{C})$;

(4) 吸收律 $\underset{\sim}{A} \cap (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) = \underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{A} \cup (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) = \underset{\sim}{A}$;

(5) 分配律 $\underset{\sim}{A} \cap (\underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \cup (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{C})$,

$\underset{\sim}{A} \cup (\underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) \cap (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{C})$;

(6) 基元律 $\phi \cup \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}$, $U \cap \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}$;

(7) 复原律 $(\underset{\sim}{A}^c)^c = \underset{\sim}{A}$;

(8) 对偶律 $(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B})^c = \underset{\sim}{A}^c \cap \underset{\sim}{B}^c$, $(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B})^c = \underset{\sim}{A}^c \cup \underset{\sim}{B}^c$.

证 只证(7), (8), 其于由读者完成.

设 $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B} \in \mathscr{F}(U)$, $\forall u \in 0$ 有

$$(\underset{\sim}{A}^c)^c(u) = 1 - \underset{\sim}{A}^c(u) = 1 - [1 - \underset{\sim}{A}(u)] = \underset{\sim}{A}(u).$$

即

$$(\underset{\sim}{A}^c)^c = \underset{\sim}{A}.$$

$$\begin{aligned}(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B})^c(u) &= 1 - (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B})(u) \\ &= 1 - (\underset{\sim}{A}(u) \vee \underset{\sim}{B}(u)) \\ &= (1 - \underset{\sim}{A}(u)) \wedge (1 - \underset{\sim}{B}(u))\end{aligned}$$

$$= A^c(u) \vee B^c(u)$$

$$= (A^c \cap B^c)(u)$$

即

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

同法可得$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. □

这个定理说明$(\mathscr{F}(U), \cup, \cap, ^c)$是软代数，但它并非布尔代数，因为$(\mathscr{F}(U), \cup, \cap, ^c)$不满足补元律。事实上

$$A^c(u) = 1 - A(u),$$

$$(A \cup A^c)(u) = A(u) \vee (1 - A(u)) \neq 1;$$

除非$A(u) \in \{0, 1\}$.故$A \cup A^c \neq U$。同理$A \cap A^c \neq \phi$。很明显，当$\forall u \in U$，$A(u) \in \{0, 1\}$时，A已经蜕化为普通集。

Fuzzy 集的补运算不满足补元律，根源在于 Fuzzy 集并非明确地由论域的某些元素构成。Fuzzy 集 A 与A^c都没有明确分界线。$A \cap A^c \neq \phi$ 说明A与A^c交迭，但交迭的深浅有一定限制。事实上，

$$A(u) \wedge A^c(u) \leqslant \frac{1}{2} \qquad (\forall u \in U).$$

同样，$A \cup A^c \neq U$说明 $A \cup A^c$不能完全掩盖U，但差额也有一定限制。事实上，

$$A(u) \vee A^c(u) \geqslant \frac{1}{2} \qquad (\forall u \in U).$$

为了区别于普通集的补集，也可以特别称 Fuzzy 集的补

集为伪补集。Fuzzy 集的补运算不满足补元律，给 Fuzzy 集的研究带来了许多困难。但正是它不满足补元律，使得 Fuzzy 集比普通集更能客观地反映实际情况。在实际问题中，大量存在着这种模棱两可的情形。

Fuzzy集的并、交运算还可以推广到任意多个 Fuzzy 集上去。

定义5 给定 A，$A_t \in \mathscr{F}(U)$，$t \in T \neq \phi$，T 为指标集。

(i) 设 $A(u) = \bigvee_{t \in T} A_t(u)$.则称 A 为 $\{A_t\}_{t \in T}$ 的并，记作.

$$A = \bigcup_{t \in T} A_t.$$

(ii) 设 $A(u) = \bigwedge_{t \in T} A_t(u)$.则称 A 为 $\{A_t\}_{t \in T}$ 的交，记作

$$A = \bigcap_{t \in T} A_t$$

定理2 设 A，$A_t \in \mathscr{F}(u)$，$t \in T \neq \phi$. 则

(i) $A \cap (\bigcup_{t \in T} A_t) = \bigcup_{t \in T} (A \cap A_t)$,

$A \cup (\bigcap_{t \in T} A_t) = \bigcap_{t \in T} (A \cup A_t)$;

(ii) $(\bigcup_{t \in T} A_t)^c = \bigcap_{t \in T} A_t^c$,

$(\bigcap_{t \in T} A)^c = \bigcup_{t \in T} A_t^c$.

证 对任何 $u \in U$，我们有

$$(A \cap (\bigcup_{t \in T} A_t))(u) = A(u) \wedge (\bigcup_{t \in T} A_t)(u)$$

$$= A(u)\wedge(\bigvee_{t\in T} A_t(u))$$

把§1.6的引理3用于$A(u)$以及$A_t(u)$，$t\in T$，得到

$$A(u)\wedge(\bigvee_{t\in T} A_t(u)) = \bigvee_{t\in T}(A(u)\wedge A_t(u))$$

$$= \bigvee_{t\in T}(A\cap A_t)(u)$$

因而

$$(A\cap(\bigcup_{t\in T} A_t))(u) = (\bigcup_{t\in T}(A\cap A_t))(u).$$

所以

$$A\cap(\bigcup_{t\in T} A_t) = \bigcup_{t\in T}(A\cap A_t).$$

同理推出其它三个等式。 □

根据这个定理，我们可以断言$(\mathscr{F}(U),\ \cup,\ \cap,\ ^c)$是一个完备的软代数。

二、 Fuzzy集合的代数和、代数积、有界和、有界积

对Fuzzy集还可以引入其它运算，其中的相当一部分可以统一在所谓三角并与三角交之下，详述于下节。

定义6 设A，B，$C\in\mathscr{F}(U)$。

(i) A与B的代数和$C = A\hat{+}B$由下式确定

$$C(u) = (A\hat{+}B)(u) = A(u) + B(u) - A(u)\cdot B(u) \quad (\forall u\in U)$$

(ii) A与B的代数积$C = A\hat{\cdot}B$由下式确定

$$C(u) = (A\hat{\cdot}B)(u) = A(u)\cdot B(u) \quad (\forall u\in U)$$

由于$\forall a, b\in[0, 1]$，$0\leqslant a+b-ab\leqslant 1$，$0\leqslant ab\leqslant 1$，故$\underset{\sim}{A}\hat{+}\underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{A}\hat{\cdot}\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(U)$，即Fuzzy集的代数和及代数积仍为Fuzzy集。

定理3 Fuzzy集的代数和及代数积满足

(1) 交换律 $\underset{\sim}{A}\hat{+}\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}\hat{+}\underset{\sim}{A}$，

$$\underset{\sim}{A}\hat{\cdot}\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}\hat{\cdot}\underset{\sim}{A};$$

(2) 结合律 $(\underset{\sim}{A}\hat{+}\underset{\sim}{B})\hat{+}\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\hat{+}(\underset{\sim}{B}\hat{+}\underset{\sim}{C})$，

$$(\underset{\sim}{A}\hat{\cdot}\underset{\sim}{B}\hat{\cdot})\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\hat{\cdot}(\underset{\sim}{B}\hat{\cdot}\underset{\sim}{C});$$

(3) 基元律 $\phi\hat{+}\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}$，　$\phi\hat{\cdot}\underset{\sim}{A}=\phi$，

$$U\hat{+}\underset{\sim}{A}=U,\quad U\hat{\cdot}\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A};$$

(4) 对偶律 $(\underset{\sim}{A}\hat{+}\underset{\sim}{B})^c=\underset{\sim}{A}^c\hat{\cdot}\underset{\sim}{B}^c$，

$$(\underset{\sim}{A}\hat{\cdot}\underset{\sim}{B})^c=\underset{\sim}{A}^c\hat{+}\underset{\sim}{B}^c.$$

证 只证对偶律第一式，其余由读者完成。

$$\begin{aligned}(\underset{\sim}{A}\hat{+}\underset{\sim}{B})^c(u)&=1-(\underset{\sim}{A}\hat{+}\underset{\sim}{B})(u)\\&=1-(\underset{\sim}{A}(u)-\underset{\sim}{B}(u)-\underset{\sim}{A}(u)\cdot\underset{\sim}{B}(u))\\&=(1-\underset{\sim}{A}(u))(1-\underset{\sim}{B}(u))\\&=\underset{\sim}{A}^c(u)\cdot\underset{\sim}{B}^c(u)\\&=(\underset{\sim}{A}^c\hat{\cdot}\underset{\sim}{B}^c)(u).\end{aligned}$$ □

不难检查，代数和及代数积不满足幂等律、吸收律、分配律及补元律。因此$(\mathscr{F}(U), \hat{+}, \hat{\cdot})$不是格。

定义7 设$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{C}\in\mathscr{F}(U)$

(i) $\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$的有界和$\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\oplus\underset{\sim}{B}$由下式确定

$$\underset{\sim}{C}(u)=(\underset{\sim}{A}\oplus\underset{\sim}{B})(u)$$

$$=1\wedge(\underset{\sim}{A}(u)+\underset{\sim}{B}(u)); \qquad \forall u\in U.$$

(ii) $\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$的有界积$\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}$由下式确定

$$\underset{\sim}{C}(u)=(\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B})(u)$$

$$=0\vee(\underset{\sim}{A}(u)+\underset{\sim}{B}(u)-1). \qquad \forall u\in U.$$

由于$\forall a, b\in[0, 1]$，$0\leqslant 1\wedge a+b\leqslant 1$，$0\leqslant 0\vee(a+b-1)\leqslant 1$，故$\underset{\sim}{A}\oplus\underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(U)$.

定理4 Fuzzy 集的有界和与有界积满足

(1) 交换律 $\underset{\sim}{A}\oplus\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}\oplus\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}\odot\underset{\sim}{A}$；

(2) 结合律 $(\underset{\sim}{A}\oplus\underset{\sim}{B})\oplus\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\oplus(\underset{\sim}{B}\oplus\underset{\sim}{C})$，

$(\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B})\odot\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\odot(\underset{\sim}{B}\odot\underset{\sim}{C})$；

(3) 基元律 $\phi\oplus\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}$，$\phi\odot\underset{\sim}{A}=\phi$，

$U\oplus\underset{\sim}{A}=U$，$U\odot\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}$；

(4) 补元律 $\underset{\sim}{A}\oplus\underset{\sim}{A}^c=U$，$\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{A}^c=\phi$；

(5) 对偶律 $(\underset{\sim}{A}\oplus\underset{\sim}{B})^c=\underset{\sim}{A}^c\odot\underset{\sim}{B}^c$，

$(\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B})^c=\underset{\sim}{A}^c\oplus\underset{\sim}{B}^c$.

证 只证对偶律，其余由读者完成.

$$
\begin{aligned}
(\underset{\sim}{A}\oplus\underset{\sim}{B})^c(u) &= 1-(\underset{\sim}{A}\oplus\underset{\sim}{B})(u)\\
&= 1-[1\wedge(\underset{\sim}{A}(u)+\underset{\sim}{B}(u))]\\
&= (1-1)\vee(1-\underset{\sim}{A}(u)-\underset{\sim}{B}(u))\\
&= 0\vee(1-\underset{\sim}{A}(u)+1-\underset{\sim}{B}(u)-1)\\
&= 0\vee(\underset{\sim}{A}^c(u)+\underset{\sim}{B}^c(u)-1)\\
&= (\underset{\sim}{A}^c\odot\underset{\sim}{B}^c)(u).
\end{aligned}
$$

于是得到 $(\underset{\sim}{A}\oplus\underset{\sim}{B})^c=\underset{\sim}{A}^c\odot\underset{\sim}{B}^c$. 这就是对偶律的第一式.

把对偶律的第一式用于$\underset{\sim}{A}^c$及$\underset{\sim}{B}^c$，我们有

$$(\underset{\sim}{A}^c\oplus\underset{\sim}{B}^c)^c=\underset{\sim}{A}^{cc}\odot\underset{\sim}{B}^{cc}.$$

也就是

$$(\underset{\sim}{A}^c\oplus\underset{\sim}{B}^c)^c=\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}.$$

两边取补，得

$$(\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B})^c=\underset{\sim}{A}^c\oplus\underset{\sim}{B}^c.$$

换言之，对偶律的第二式也成立. □

容易检查有界和及有界积不满足幂等律、吸收律及分配律. 因此$(\mathscr{F}(U),\oplus,\odot)$也不是格. 但由于这一对运算满足补元律，故可用来引进 Fuzzy 分割的概念.

定义8 给定$\underset{\sim}{A}_1$, $\underset{\sim}{A}_2$, …, $\underset{\sim}{A}_n\in\mathscr{F}(U)$. 设$\underset{\sim}{A}_i\neq\phi$, $\underset{\sim}{A}_i\neq U$, $i=1, 2\cdots\cdots, n$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\underset{\sim}{A}_i(u)=1(\forall u\in U)$. 则称$\underset{\sim}{A}_1$, $\underset{\sim}{A}_2$, …, $\underset{\sim}{A}_n$为U上的一个 Fuzzy 分割.

不难证明：如果$\underset{\sim}{A}_1$，$\underset{\sim}{A}_2\cdots$，$\underset{\sim}{A}_n$是$U$上的一个 Fuzzy 分割，那么必有$\underset{\sim}{A}_1\oplus\underset{\sim}{A}_2\oplus\cdots\oplus\underset{\sim}{A}_n=U$ 且$\underset{\sim}{A}_i\odot\underset{\sim}{A}_j=\phi(i\neq j)$.

定理5 对于任意$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(U)$，总有

$$\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{A}\,\hat{\cdot}\,\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}$$

$$\subseteq\underset{\sim}{A}\,\hat{+}\,\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{A}\oplus\underset{\sim}{B}\ .$$

证
$$\begin{aligned}(\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B})(u)&=0\vee(\underset{\sim}{A}(u)+\underset{\sim}{B}(u)-1)\\&=0\vee[\underset{\sim}{A}(u)\cdot\underset{\sim}{B}(u)-(1-\underset{\sim}{A}(u))(1-\\&\quad\underset{\sim}{B}(u))]\\&\leqslant0\vee(\underset{\sim}{A}(u)\cdot\underset{\sim}{B}(u))=(\underset{\sim}{A}\,\hat{\cdot}\,\underset{\sim}{B})(u)\end{aligned}$$

又显然有

$$\underset{\sim}{A}(u)\cdot\underset{\sim}{B}(u)\leqslant\underset{\sim}{A}(u)\wedge\underset{\sim}{B}(u)=(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})(u)$$

$$\underset{\sim}{A}(u)\wedge\underset{\sim}{B}(u)\leqslant\underset{\sim}{A}(u)\vee\underset{\sim}{B}(u)=(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})(u)$$

于是得到

$$\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{A}\,\hat{\cdot}\,\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}\ . \tag{1}$$

不仅如此，因为

$$\underset{\sim}{A}(u)\cdot\underset{\sim}{B}(u)\leqslant\underset{\sim}{A}(u);\quad\underset{\sim}{A}(u)\cdot\underset{\sim}{B}(u)\leqslant\underset{\sim}{B}(u),$$

所以

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{A}(u)\vee\underset{\sim}{B}(u)&\leqslant\underset{\sim}{A}(u)+\underset{\sim}{B}(u)-\underset{\sim}{A}(u)\cdot\underset{\sim}{B}(u)\\&\leqslant(\underset{\sim}{A}\,\hat{+}\,\underset{\sim}{B})(u)\end{aligned}$$

又显然有

$$\underset{\sim}{A}(u)+\underset{\sim}{B}(u)-\underset{\sim}{A}(u)\cdot\underset{\sim}{B}(u)\leqslant 1,$$

$$\underset{\sim}{A}(u)+\underset{\sim}{B}(u)-\underset{\sim}{A}(u)\cdot\underset{\sim}{B}(u)\leqslant\underset{\sim}{A}(u)+\underset{\sim}{B}(u).$$

故

$$\underset{\sim}{A}(u)\hat{+}\underset{\sim}{B}(u)\leqslant 1\wedge(\underset{\sim}{A}(u)+\underset{\sim}{B}(u))=(\underset{\sim}{A}\oplus\underset{\sim}{B})(u)$$

于是得到

$$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{A}\hat{+}\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{A}\oplus\underset{\sim}{B} \qquad (2)$$

由(1)及(2)，得到所希望的结果。 □

定理6 对于任意$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(U)$，总有

$$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}\oplus(\underset{\sim}{A}^c\odot\underset{\sim}{B}),\quad \underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}\odot(\underset{\sim}{A}^c\oplus\underset{\sim}{B});$$

$$\underset{\sim}{A}\hat{+}\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}\oplus(\underset{\sim}{A}^c\hat{\cdot}\underset{\sim}{B}),\quad \underset{\sim}{A}\hat{\cdot}\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}\odot(\underset{\sim}{A}^c\hat{+}\underset{\sim}{B}).$$

证
$$\begin{aligned}(\underset{\sim}{A}^c\odot\underset{\sim}{B})(u)&=0\vee(\underset{\sim}{A}^c(u)+\underset{\sim}{B}(u)-1)\\&=0\vee(\underset{\sim}{B}(u)-\underset{\sim}{A}(u))\\&=\frac{1}{2}[\underset{\sim}{B}(u)-\underset{\sim}{A}(u)+|\underset{\sim}{B}(u)-\underset{\sim}{A}(u)|],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\underset{\sim}{A}(u)+(\underset{\sim}{A}^c\odot\underset{\sim}{B})(u)\\&=\frac{1}{2}[\underset{\sim}{B}(u)+\underset{\sim}{A}(u)+|\underset{\sim}{B}(u)-\underset{\sim}{A}(u)|]\\&=\underset{\sim}{A}(u)\vee\underset{\sim}{B}(u)\end{aligned}$$

$$=(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})(u).$$

于是

$$1\wedge[\underset{\sim}{A}(u)+(\underset{\sim}{A}^c\odot\underset{\sim}{B})(u)]=1\wedge(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})(u)$$
$$=(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})(u).$$

即

$$\underset{\sim}{A}\oplus(\underset{\sim}{A}^c\odot\underset{\sim}{B})=\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}.$$

利用对偶律及上式，得到

$$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}=(\underset{\sim}{A}^c\cup\underset{\sim}{B}^c)^c=[\underset{\sim}{A}^c\oplus(\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}^c)]^c$$
$$=(\underset{\sim}{A}^c)^c\odot(\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}^c)^c=\underset{\sim}{A}\odot(\underset{\sim}{A}^c\oplus\underset{\sim}{B}).$$

类似的证明其余两等式。 □

§2.3 Fuzzy集合的三角并与三角交

本节将把Fuzzy集的并与交、代数和与代数积、有界和与有界积等运算概适成为Fuzzy集的三角并与三角交。

一、三角范数与反三角范数

定义1 (i) 二元运算 $\Delta:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ 叫做 $[0,1]$ 的**三角范数**，意思是指它满足下列条件：

交换性 $a\Delta b=b\Delta a$；

结合性 $(a\Delta b)\Delta c=a\Delta(b\Delta c)$；

单调性 $a\leqslant b\Longrightarrow a\Delta c\leqslant b\Delta c$；

最大性 $1\Delta a=a$。

(ii) 二元运算 $\Delta:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ 叫做 $[0,1]$上的**反三角范数**，意思是指它具有交换性、结合性、

单调性以及下述

最小性　$0\Delta a=a$。

三角范数以及反三角范数分别记作⊤及⊥，统称三角范算子，有时简称范算子。范算子称为连续的，意思是指，它作为二元函数是连续的。

从范算子Δ的单调性容易推知

$$a\leqslant b,\ c\leqslant d\Longrightarrow a\Delta c\leqslant b\Delta d.$$

另外，范算子的最大性与最小性显然不能两立；换言之，任何范算子不能既是三角范数，又是反三角范数。

例1　对 $a,\ b\in[0,\ 1]$，令 $\top_1=\wedge$，$\bot_1=\vee$；$\top_2=\hat{\cdot}$，$\bot_2=\hat{+}$；$\top_3=\odot$，$\bot_3=\oplus$，即

$$a\top_1 b=a\wedge b\qquad a\bot_1 b=a\vee b$$

$$a\top_2 b=ab\qquad a\bot_2 b=a+b-ab$$

$$a\top_3 b=0\vee(a+b-1)\qquad a\bot_3 b=1\wedge(a+b).$$

容易验证 $\top_1$，$\top_2$，$\top_3$ 都是三角范数；$\bot_1$，$\bot_2$，$\bot_3$ 都是反三角范数。

例2　给定闭区间 $[0,\ 1]$ 上的二元运算 $\sqcup$ 及 $\sqcap$，

$$a\sqcap b=\begin{cases}b & \text{当}a=1\\ a & \text{当}b=1\\ 0 & \text{当}a\neq 1\text{且}b\neq 1,\end{cases}$$

$$a\sqcup b=\begin{cases}b & \text{当}a=0\\ a & \text{当}b=0\\ 1 & \text{当}a\neq 0\text{且}b\neq 0.\end{cases}$$

容易验证 $\sqcap$ 是三角范数，$\sqcup$ 是反三角范数。

定理1　设⊤，⊥分别是 $[0,\ 1]$ 上的任意三角范数及反三角范数，又 $a,\ b\in[0,\ 1]$，则

(1) $a \sqcap b \leqslant a \top b \leqslant a \wedge b$,

(2) $a \vee b \leqslant a \perp b \leqslant a \sqcup b$;

证 (1) 当 a, b 均不等于 1 时，不等式 $a \sqcap b \leqslant a \top b$ 自动成立；当 a, b 两者之中至少有一个等于 1 时，此不等式显然也正确。因此在任何情况下均有

$$a \sqcap b \leqslant a \top b.$$

其次，因为 $a \top b \leqslant a \top 1 = 1 \top a = a$ 且 $a \top b \leqslant 1 \top b = b$，所以

$$a \top b \leqslant a \wedge b.$$

(2) 证法类似。 □

从定理 1 看出，对任何 $a \in [0, 1]$，必有 $0 \top a = 0$，$1 \perp a = 1$。

定理2 设 Δ 是 $[0, 1]$ 上的范算子。

(1) $$(\bigvee_{k=1}^{n} a_k) \Delta b = \bigvee_{k=1}^{n} (a_k \Delta b),$$

$$(\bigwedge_{k=1}^{n} a_k) \Delta b = \bigwedge_{k=1}^{n} (a_k \Delta b);$$

(2) 若二元函数 $x \Delta y$ 关于前一个变元 x 连续（或者关于后一个变元 y 连续）则

$$(\bigvee_{t \in T} a_t) \Delta b = \bigvee_{t \in T} (a_t \Delta b),$$

$$(\bigwedge_{t \in T} a_t) \Delta b = \bigwedge_{t \in T} (a_t \Delta b);$$

其中 T 是非空的指标集。

证 (1) 设 $a_j = \bigvee_{k=1}^{n} a_k$，则 $a_j \Delta b = (\bigvee_{k=1}^{n} a_k) \Delta b$，从而

$$\bigvee_{k=1}^{n}(a_k\Delta b)\geqslant(\bigvee_{k=1}^{n}a_k)\Delta b.$$

另一方面，由于 $a_i\leqslant\bigvee_{k=1}^{n}a_k$，$i=1, 2, \cdots, n$，根据范算子的单调性，有

$$a_i\Delta b\leqslant(\bigvee_{k=1}^{n}a_k)\Delta b,$$

于是

$$\bigvee_{i=1}^{n}(a_i\Delta b)\leqslant(\bigvee_{k=1}^{n}a_k)\Delta b.$$

故

$$(\bigvee_{k=1}^{n}a_k)\Delta b=\bigvee_{k=1}^{n}(a_k\Delta b).$$

类似地证明另一个等式。

(2) 因为范算子具有交换性，所以 $x\Delta y$ 关于 x 的连续性等价于 $x\Delta y$ 关于 y 的连续性。

记 $\bigvee_{t\in T}a_t=a_0$. 于是存在单调增加序列 a_{t_1}，a_{t_2}，…收敛于 a_0。$\forall k$，$a_{t_k}\leqslant a_0$. 利用 $x\Delta y$ 关于变元 x 的连续性假设，有

$$a_{t_k}\Delta b\to a_0\Delta b \qquad (k\to+\infty).$$

又因

$$a_{t_k}\Delta b\leqslant\bigvee_{t\in T}(a_t\Delta b),$$

故

$$a_0 \Delta b \leqslant \bigvee_{t \in T} (a_t \Delta b)_{\circ}$$

即

$$(\bigvee_{t \in T} a_t) \Delta b \leqslant \bigvee_{t \in T} (a_t \Delta b).$$

另一方面，因 $\forall t \in T$，$a_t \leqslant a_0$，由单调性，有 $a_t \Delta b \leqslant a_0 \Delta b$。于是

$$\bigvee_{t \in T} (a_t \Delta b) \leqslant a_0 \Delta b.$$

即

$$\bigvee_{t \in T} (a_t \Delta b) \leqslant (\bigvee_{t \in T} a_t) \Delta b.$$

因此

$$(\bigvee_{t \in T} a_t) \Delta b = \bigvee_{t \in T} (a_t \Delta b),$$

同法证明另一个等式。 □

定理3 给定 [0, 1] 上的三角范数T，令

$$a \perp b = 1 - (1 - a) \top (1 - b)$$

则⊥是一个反三角范数，叫做从T导出的反三角范数。

反过来，给定 [0, 1] 上的反三角范数⊥。令

$$a \top b = 1 - (1 - a) \perp (1 - b)$$

则T是一个三角范数，叫做从⊥导出的三角范数。

证 我们只证由T导出的⊥是满足结合律的. 记 $1 - a = \alpha$，$1 - b = \beta$，$1 - c = \gamma$。于是

$$\begin{aligned}(a \perp b) \perp c &= (1 - \alpha \top \beta) \perp c \\ &= 1 - [(1 - (1 - \alpha \top \beta)) \top \gamma] \\ &= 1 - [(\alpha \top \beta) \top \gamma];\end{aligned}$$

$$a \perp (b \perp c) = a \perp (1 - \beta \top \gamma)$$

$$=1-[\alpha\top(1-(1-\beta\top\gamma))]$$
$$=1-[\alpha\top(\beta\top\gamma)].$$

因为已知 $(\alpha\top\beta)\top\gamma=\alpha\top(\beta\top\gamma)$，所以

$$(a\perp b)\perp c=a\perp(b\perp c).$$

其余由读者完成。 □

定理4 设$\top$是$[0,1]$上的三角范数，$\perp$是由$\top$导出的反三角范数，则

(1) $x\perp y$关于变元x，y连续的充分必要条件是$x\top y$关于变元x，y连续；

(2) $\top$及$\perp$满足对偶律，即$(a\top b)^c=a^c\perp b^c$，$(a\perp b)^c=a^c\top b^c$。其中$x^c=1-x$。

证 (1) 由$x\perp y=1-(1-x)\top(1-y)$，据复合函数的连续性理论易证。

(2)
$$\begin{aligned}(a\top b)^c&=1-(a\top b)\\&=1-[1-(1-a)\perp(1-b)]\\&=(1-a)\perp(1-b)\\&=a^c\perp b^c.\end{aligned}$$

同法推出其余等式。 □

定义2 设Δ_1，Δ_2是$[0,1]$上的两个范算子。我们说Δ_1弱于Δ_2，或说Δ_2强于Δ_1，意思是指，对任何a，$b\in[0,1]$有$a\Delta_1 b\leqslant a\Delta_2 b$，并记作$\Delta_1\leqslant\Delta_2$。

设$[0,1]$上的所有三角范数构成集合$\mathscr{D}_\top$，所有反三角范数构成集合$\mathscr{D}_\perp$。由定理1得知，$\mathscr{D}_\top$的最弱元是$\sqcap$，最强元是$\wedge$；$\mathscr{D}_\perp$的最弱元是$\vee$，最强元是$\sqcup$。还有，$a\top b\leqslant a\perp b$，换言之，任何三角范数都弱于任何反三角范数。

前面已指出$\mathscr{D}_\top$与$\mathscr{D}_\perp$没有公共元素。记$\mathscr{D}=\mathscr{D}_\top\cup\mathscr{D}_\perp$

则$(\mathscr{D}_\top, \leqslant)$，$(\mathscr{D}_\perp, \leqslant)$，$(\mathscr{D}, \leqslant)$都是具有最大元及最小元的偏序集。

定理5 设$\top$是三角范数，$\perp$是反三角范数。

(1) $\top$为$\mathscr{D}_\top$的最弱元的充分必要条件是，对任何不等于1的a，b，均有$a\top b=0$。

(2) $\top$为$\mathscr{D}_\top$的最强元的充分必要条件是$\top$满足幂等律，即任何$a\in[0, 1]$均有$a\top a=a$。

(3) $\perp$为$\mathscr{D}_\perp$的最弱元的充分必要条件是$\perp$满足幂等律，即任何$a\in[0, 1]$均有$a\perp a=a$。

(4) $\perp$为$\mathscr{D}_\perp$的最强元的充分必要条件是，对任何不等于0的a，b，均有$a\perp b=1$。

证 (1) 设$\top$为$\mathscr{D}_\top$的最弱元。于是$\top=\sqcap$。所以对任何不等于1的a，b，均有$a\top b=a\sqcap b=0$。这样，必要性是正确的。

反过来考察充分性。任取a，$b\in[0, 1]$。分别处理两种情况。

当a，b均不等于1。利用已知条件得$a\top b=0=a\sqcap b$。

当a，b至少有一个等于1．例如设$a=1$，此时$a\top b=b=a\sqcap b$；再如设$b=1$．此时$a\top b=b\top a=a=b\sqcap a=a\sqcap b$。

由此可见，在任何情况下均有$a\top b=a\sqcap b$。即$\top=\sqcap$，因而$\top$是$\mathscr{D}_\top$的最弱元。

(2) 设$\top$为$\mathscr{D}_\top$的最强元。于是$\top=\wedge$。所以对任何$a\in[0, 1]$均有$a\top a=a\wedge a=a$。这样，必要性是正确的。

反过来，考察充分性。任取a，$b\in[0, 1]$，不失一般性，无妨设$a\leqslant b$。于是

$$a=a\top a\leqslant a\top b\leqslant a\wedge b=a$$

故$a \top b = a \wedge b$。换言之，满足幂等律的 $\top$ 就是 $\wedge$，即$\perp$ 是$\mathscr{D}_{T}$的最强元。

类似地证明(3)及(4)。 □

从定理5直接得出

推论 给定三角范数$\top$以及反三角范数 $\perp$。如果$\{\top, \perp\} \neq \{\wedge, \vee\}$，那么$([0, 1], \perp, \top)$不是格，$([0, 1], \perp, \top, ^c)$也不是软代数。

二、Fuzzy 集合的三角并与三角交

现在利用三角范算子引进 Fuzzy 集的一类运算。

定义3 设$\top$是$[0, 1]$上的三角范数，$\perp$是从$\top$导出的反三角范数。对$\forall A, B \in \mathscr{F}(U)$令

$$(A \textcircled{\scriptsize T} B)(u) = A(u) \top B(u)$$

$$(A \textcircled{\scriptsize $\perp$} B)(u) = A(u) \perp B(u)$$

称$A \textcircled{\scriptsize T} B$及$A \textcircled{\scriptsize $\perp$} B$分别为$A$，$B$的**三角交及三角并**。

显然，$A \textcircled{\scriptsize T} B$，$A \textcircled{\scriptsize $\perp$} B$都是$U$上的 Fuzzy 集，$A \cap B$，$A \hat{\cdot} B$，$A \odot B$都是三角交，它们所对应的三角范数在$[0, 1]$上是连续的；$A \cup B$，$A \hat{+} B$，$A \ominus B$都是三角并，它们所对应的三角范数在$[0, 1]$上是连续的。

例3 给定二元函数

$$f:[0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$$

$$f(a, b) = \frac{ab}{1 + (1-a)(1-b)},$$

求证$f \in \mathscr{D}_{T}$，并确定从$\top = f$导出的反三角范数$\perp$的表示

式。

不难直接检查 $a\top b=f(a,\ b)$ 适合定义1中的全部条件，故 $f\in\mathscr{D}_T$。又由定理3，所求的反三角范数的表示式为

$$a\perp b=1-(1-a)\top(1-b)$$
$$=1-\frac{(1-a)(1-b)}{1+ab}=\frac{a+b}{1+ab}$$

与 $\top$，$\perp$ 相应的 Fuzzy 集的三角交及三角并分别为

$$(\underset{\sim}{A}\overset{\bullet}{\varepsilon}\underset{\sim}{B})(u)=\frac{\underset{\sim}{A}(u)\cdot\underset{\sim}{B}(u)}{1+(1-\underset{\sim}{A}(u))(1-\underset{\sim}{B}(u))},$$

$$(\underset{\sim}{A}\overset{+}{\varepsilon}\underset{\sim}{B})(u)=\frac{\underset{\sim}{A}(u)+\underset{\sim}{B}(u)}{1+\underset{\sim}{A}(u)\underset{\sim}{B}(u)}.$$

$\overset{\bullet}{\varepsilon}$，$\overset{+}{\varepsilon}$统称 Einstain 算子。

例4 设 $f(a,b)=1-1\wedge[(1-a)^\nu+(1-b)^\nu]^{1/\nu}\quad(\nu>0)$。不难验证，由等式 $a\top b=f(a,\ b)$ 规定的 $\top$ 是 $[0,\ 1]$ 上的一个三角范数。根据定理 3 导出反三角范数 $\perp$，

$$a\perp b=1\wedge(a^\nu+b^\nu)^{1/\nu}$$

相应于它们的 Fuzzy 集的运算为

$$(\underset{\sim}{A}\curlywedge\underset{\sim}{B})(u)=1-1\wedge[(1-\underset{\sim}{A}(u))^\nu+(1-\underset{\sim}{B}(u))^\nu]^{1/\nu},$$

$$(\underset{\sim}{A}\curlyvee\underset{\sim}{B})(u)=1\wedge[\underset{\sim}{A}(u)^\nu+\underset{\sim}{B}(u)^\nu]^{1/\nu};$$

其中 $\nu>0$。称 $\curlywedge$，$\curlyvee$ 为 Yager 算子。若 $\nu=1$，则 $\curlywedge$，$\curlyvee$ 分别成为 $\odot$，$\oplus$；若 $\nu\to+\infty$，则 $\curlywedge$，$\curlyvee$ 分别变成 $\wedge$，$\vee$。

定理6 Fuzzy 集的三角交Ⓣ及三角并Ⓛ运算具有下列性质：

(1) 交换律 $\underset{\sim}{A}\textcircled{\scriptsize T}\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}\textcircled{\scriptsize T}\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{A}\textcircled{\scriptsize $\perp$}\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}\textcircled{\scriptsize $\perp$}\underset{\sim}{A}$;

(2) 结合律 $(\underset{\sim}{A}\textcircled{\scriptsize T}\underset{\sim}{B})\textcircled{\scriptsize T}\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\textcircled{\scriptsize T}(\underset{\sim}{B}\textcircled{\scriptsize T}\underset{\sim}{C})$,

$(\underset{\sim}{A}\textcircled{\scriptsize $\perp$}\underset{\sim}{B})\textcircled{\scriptsize $\perp$}\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\textcircled{\scriptsize $\perp$}(\underset{\sim}{B}\textcircled{\scriptsize $\perp$}\underset{\sim}{C})$;

(3) 单调律 $\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{C}$, $\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{D}\Longrightarrow\underset{\sim}{A}\textcircled{\scriptsize T}\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{C}\textcircled{\scriptsize T}\underset{\sim}{D}$,

$\underset{\sim}{A}\textcircled{\scriptsize $\perp$}\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{C}\textcircled{\scriptsize $\perp$}\underset{\sim}{D}$;

(4) 基元律 $\phi\textcircled{\scriptsize T}\underset{\sim}{A}=\phi$, $\phi\textcircled{\scriptsize $\perp$}\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}$,

$U\textcircled{\scriptsize T}\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}$, $U\textcircled{\scriptsize $\perp$}\underset{\sim}{A}=U$;

(5) 对偶律 $(\underset{\sim}{A}\textcircled{\scriptsize T}\underset{\sim}{B})^c=\underset{\sim}{A}^c\textcircled{\scriptsize $\perp$}\underset{\sim}{B}^c$,

$(\underset{\sim}{A}\textcircled{\scriptsize $\perp$}\underset{\sim}{B})^c=\underset{\sim}{A}^c\textcircled{\scriptsize T}\underset{\sim}{B}^c$

(6) $\underset{\sim}{A}\textcircled{\scriptsize T}\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{A}\textcircled{\scriptsize $\perp$}\underset{\sim}{B}$;

(7) $\left(\bigcup_{k=1}^{n}\underset{\sim}{A}_k\right)\textcircled{\scriptsize T}\underset{\sim}{B}=\bigcup_{k=1}^{n}\left(\underset{\sim}{A}_k\textcircled{\scriptsize T}\underset{\sim}{B}\right)$, $\left(\bigcup_{k=1}^{n}\underset{\sim}{A}_k\right)\textcircled{\scriptsize T}\underset{\sim}{B}$

$=\bigcap_{k=1}^{n}\left(\underset{\sim}{A}_k\textcircled{\scriptsize T}\underset{\sim}{B}\right)$;

$\left(\bigcup_{k=1}^{n}\underset{\sim}{A}_k\right)\textcircled{\scriptsize $\perp$}\underset{\sim}{B}=\bigcup_{k=1}^{n}\left(\underset{\sim}{A}_k\textcircled{\scriptsize $\perp$}\underset{\sim}{B}\right)$, $\left(\bigcap_{k=1}^{n}\underset{\sim}{A}_k\right)\textcircled{\scriptsize $\perp$}\underset{\sim}{B}$

$=\bigcap_{k=1}^{n}\left(\underset{\sim}{A}_k\textcircled{\scriptsize $\perp$}\underset{\sim}{B}\right)$;

(8) 若 $x\mathrm{T}y$ 关于变元 x 或关于变元 y 连续，则

$\left(\bigcup_{t\in T}\underset{\sim}{A}_t\right)\textcircled{\scriptsize T}\underset{\sim}{B}=\bigcup_{t\in T}\left(\underset{\sim}{A}_t\textcircled{\scriptsize T}\underset{\sim}{B}\right)$,

$$\left(\bigcap_{t\in T} A_t\right) \textcircled{T} B = \bigcap_{t\in T}\left(A_t \textcircled{T} B\right);$$

$$\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right) \textcircled{\perp} B = \bigcup_{t\in T}\left(A_t \textcircled{\perp} B\right),$$

$$\left(\bigcap_{t\in T} A_t\right) \textcircled{\perp} B = \bigcap_{t\in T}\left(A_t \textcircled{\perp} B\right).$$

证 这些都是定义 1 至定义 3，以及定理 1 至定理 3 的直接推论。 □

§ 2.4 Fuzzy集合的分解定理

Fuzzz 集的 α-截集与分解定理是联系 Fuzzy 集与普通集的桥梁，分解定理在 Fuzzy 集的理论及应用中发挥极其重要的作用。

一、Fuzzy 集合的 α- 截集

定义1 设 $A \in \mathscr{F}(U)$，$0 \leqslant \alpha \leqslant 1$。

(i) $A_\alpha = \{u \mid A(u) \geqslant \alpha\}$ 称为 Fuzzy 集 A 的 α-弱截集，简称 α-**截集**。它是一个普通集，α 称为门限高度或阈值，见图1。

(ii) $A_{\dot{\alpha}} = \{u \mid A(u) > \alpha\}$ 称为 A 的 α- 强截集。

为了使 Fuzzy 集的 α- 截集与指标集不致发生混淆，约定：

(1) 对门限高度 $\alpha \in [0, 1]$，A_α 表示 α- 截集；

(2) 对指标 $\lambda \in \Lambda$，$A^{(\lambda)}$ 表示相应于 λ 的 Fuzzy 集；

(3) 对 $\lambda \in \Lambda$ 及 $\alpha \in [0, 1]$，$A_\alpha^{(\lambda)}$ 表示 Fuzzy 集 $A^{(\lambda)}$ 的

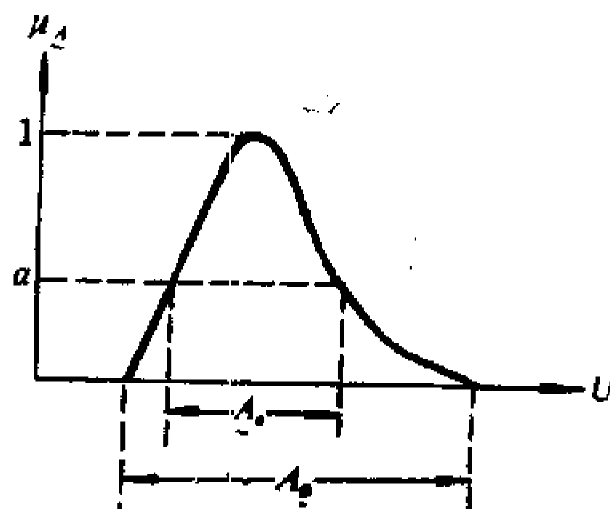


图1

α-截集。

α-截集与α-强截集具有下列性质：

性质1 $(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})_\alpha=\underset{\sim}{A}_\alpha\cup\underset{\sim}{B}_\alpha$,

$(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})_\alpha=\underset{\sim}{A}_\alpha\cap\underset{\sim}{B}_\alpha$;

$(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})_{\underset{\cdot}{\alpha}}=\underset{\sim}{A}_{\underset{\cdot}{\alpha}}\cup\underset{\sim}{B}_{\underset{\cdot}{\alpha}}$,

$(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})_{\underset{\cdot}{\alpha}}=\underset{\sim}{A}_{\underset{\cdot}{\alpha}}\cap\underset{\sim}{B}_{\underset{\cdot}{\alpha}}$.

证 $(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})_\alpha=\{u|(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})(u)\geqslant\alpha\}$

$=\{u|\underset{\sim}{A}(u)\vee\underset{\sim}{B}(u)\geqslant\alpha\}$

$=\{u|\underset{\sim}{A}(u)\geqslant\alpha\}\cup\{u|\underset{\sim}{B}(u)\geqslant\alpha\}$

$=\underset{\sim}{A}_\alpha\cup\underset{\sim}{B}_\alpha$.

$(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})_\alpha=\{u|(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})(u)\geqslant\alpha\}$

$=\{u|\underset{\sim}{A}(u)\wedge\underset{\sim}{B}(u)\geqslant\alpha\}$

$$= \{u \mid A(u) \geq \alpha\} \cap \{u \mid B(u) \geq \alpha\}$$

$$= A_\alpha \cap B_\alpha$$

关于 α- 强截集的证明，只需将≥换成>即可。 □

性质2 (i) $\alpha < \beta \Longrightarrow A_\beta \subseteq A_\alpha,\ A_{\dot\beta} \subseteq A_{\dot\alpha},\ A_\beta \subseteq A_{\dot\alpha}$,

(ii) $A_{\dot\alpha} \subseteq A_\alpha$。

证 设 $u \in A_\beta$。于是 $A(u) \geq \beta > \alpha$。故 $u \in A_\alpha$。因此 $A_\beta \subseteq A_\alpha$。其余类似可证。 □

性质3 $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\alpha^{(\lambda)} \subseteq \left(\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A^{(\lambda)}\right)_\alpha$, $\left(\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} A^{(\lambda)}\right)_\alpha = \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\alpha^{(\lambda)}$;

$\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_{\dot\alpha}^{(\lambda)} = \left(\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A^{(\lambda)}\right)_{\dot\alpha}$, $\left(\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} A^{(\lambda)}\right)_{\dot\alpha} \subseteq \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} A_{\dot\alpha}^{(\lambda)}$.

证 设 $u \in \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\alpha^{(\lambda)}$

$$\Longrightarrow \exists\, \lambda_0 \in \Lambda,\ u \in A_\alpha^{(\lambda_0)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, \lambda_0 \in \Lambda,\ A^{(\lambda_0)}(u) \geq \alpha$$

$$\Longrightarrow \bigvee_{\lambda \in \Lambda} A^{(\lambda)}(u) \geq \alpha$$

$$\Longrightarrow u \in \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A^{(\lambda)}\right)_\alpha$$

可见第一式成立。对于第二式，我们有

$$u \in \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A^{(\lambda)}\right)_\alpha$$

$$\Longleftrightarrow \bigwedge_{\lambda \in \Lambda} A^{(\lambda)}(u) \geq \alpha$$

$$\Longleftrightarrow \forall\lambda\in\Lambda,\ A^{(\lambda)}(u)\geqslant\alpha$$

$$\Longleftrightarrow \forall\lambda\in\Lambda,\ u\in A_{\alpha}^{(\lambda)}$$

$$\Longleftrightarrow u\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_{\alpha(\lambda)}.$$

故第二式成立。类似地证明其它式子。 ◻

必须指出，性质3中包含关系不一定能换为等式。详见下例。

例1　对论域U中的每个元素u，令

$$A^{(n)}(u)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right),\quad n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$$

则

$$\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A^{(n)}\right)(u)=\frac{1}{4}.$$

因而

$$\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A^{(n)}\right)_{\frac{1}{4}}=U.$$

但是，对任何n，$A_{\frac{1}{4}}^{(n)}=\phi$，于是$\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}A_{\frac{1}{4}}^{(n)}=\phi$。故

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_{\frac{1}{4}}^{(n)}\neq\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A^{(n)}\right)_{\frac{1}{4}}.$$

类似地，会

$$A^{(n)}(u)=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right),\qquad n=1,\ 2,\ \cdots$$

则

$$\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \underset{\sim}{A}^{(n)}\right)_{\frac{1}{4}} \neq \bigcap_{n=1}^{+\infty} \underset{\sim}{A}^{(n)}_{\frac{1}{4}} .$$

性质4 $\bigcup_{\beta>\alpha} \underset{\sim}{A}_{\dot{\beta}} = \underset{\sim}{A}_{\dot{\alpha}}$， $\bigcap_{\beta>\alpha} \underset{\sim}{A}_{\beta} = \underset{\sim}{A}_{\alpha}$；

$$\bigcup_{\beta>\alpha} \underset{\sim}{A}_{\beta} = \underset{\sim}{A}_{\dot{\alpha}}, \quad \bigcap_{\beta>\alpha} \underset{\sim}{A}_{\dot{\beta}} = \underset{\sim}{A}_{\alpha} .$$

证 设 $\alpha<\beta$。明显地有 $\underset{\sim}{A}_{\dot{\beta}} \subseteq \underset{\sim}{A}_{\dot{\alpha}}$。因此 $\bigcup_{\beta>\alpha} \underset{\sim}{A}_{\dot{\beta}} \subseteq \underset{\sim}{A}_{\dot{\alpha}}$.

反之，任取 $u \in \underset{\sim}{A}_{\dot{\alpha}}$ 则 $\underset{\sim}{A}(u)>\alpha$。令 $\beta = \frac{1}{2}(\alpha + \underset{\sim}{A}(u)) > \alpha$。这时有 $\underset{\sim}{A}(u) = 2\beta - \alpha > \beta$ 即 $u \in \underset{\sim}{A}_{\dot{\beta}}$ 从而 $u \in \bigcup_{\beta>\alpha} \underset{\sim}{A}_{\dot{\beta}}$。故 $\underset{\sim}{A}_{\dot{\alpha}} \subseteq \bigcup_{\beta>\alpha} \underset{\sim}{A}_{\dot{\beta}}$。

总之，$\bigcup_{\beta>\alpha} \underset{\sim}{A}_{\dot{\beta}} = \underset{\sim}{A}_{\dot{\alpha}}$。

同法证明其余等式。 □

性质5 $\underset{\sim}{A}_{\left(\bigvee_{t\in T}\alpha_t\right)} = \bigcap_{t\in T} \underset{\sim}{A}_{\alpha_t}$， $\bigcup_{t\in T} \underset{\sim}{A}_{\alpha_t} \subseteq \underset{\sim}{A}_{\left(\bigwedge_{t\in T}\alpha_t\right)}$；

$$\underset{\sim}{A}_{\left(\bigvee_{t\in T}\dot{\alpha}_t\right)} \subseteq \bigcap_{t\in T} \underset{\sim}{A}_{\dot{\alpha}_t}, \quad \bigcup_{t\in T} \underset{\sim}{A}_{\dot{\alpha}_t} = \underset{\sim}{A}_{\left(\bigwedge_{t\in T}\dot{\alpha}_t\right)},$$

证 由定义 1，我们有

$$\underset{\sim}{A}_{\left(\bigvee_{t\in T}\alpha_t\right)} = \{u \mid \underset{\sim}{A}(u) \geqslant \bigvee_{t\in T}\alpha_t\}$$

$$= \bigcap_{t\in T}\{u \mid \underset{\sim}{A}(u) \geqslant \alpha_t\} = \bigcap_{t\in T} \underset{\sim}{A}_{\alpha_t} .$$

$$A_{\left(\bigwedge_{t\in T}\alpha_t\right)}=\left\{u \mid A(u)\geqslant\bigwedge_{t\in T}\alpha_t\right\}$$

$$\supseteq\bigcup_{t\in T}\{u \mid A(u)\geqslant\alpha_t\}=\bigcup_{t\in T}A_{\alpha_t}.$$

类似地证明其余两式。 □

性质6 $(A^c)_\alpha=(A_{\underset{\cdot}{1-\alpha}})^c$，$(A)^c_{\underset{\cdot}{\alpha}}=(A_{1-\alpha})^c$。

证 任取 $u\in(A^c)_\alpha$。即 $A^c(u)\geqslant\alpha$，$1-A(u)\geqslant\alpha$，$A(u)\leqslant1-\alpha$。故 $u\notin A_{\underset{\cdot}{1-\alpha}}$。因而 $u\in(A_{\underset{\cdot}{1-\alpha}})^c$。所以 $(A^c)_\alpha\subseteq(A_{\underset{\cdot}{1-\alpha}})^c$。

反之，任取 $u\in(A_{\underset{\cdot}{1-\alpha}})^C$。即 $u\notin A_{\underset{\cdot}{1-\alpha}}$，$A(u)\leqslant1-\alpha$，$A^c(u)\geqslant\alpha$。故 $u\in(A^c)_\alpha$。所以 $(A_{\underset{\cdot}{1-\alpha}})^c\subseteq(A^c)_\alpha$。

总之，$(A^c)_\alpha=(A_{\underset{\cdot}{1-\alpha}})^c$。

类似地证明第二式。 □

在 A 的 α-截集中，常需考虑几种特殊的截集。

(i) 若取 $\alpha=0$，则 $A_0=U$，但 $A_{\underset{\cdot}{0}}$ 不一定等于 U；

(ii) 若取 $\alpha=1$，则 $A_{\underset{\cdot}{1}}=\phi$，但 A_1 不一定等于 ϕ。

定义2 设 $A\in\mathscr{F}(u)$。

(i) $A_{\underset{\cdot}{0}}$ 称为 A 的**支承**，记作 $\mathrm{Supp}\,A$，即

$$\mathrm{Supp}\,A=\{u \mid A(u)>0\};$$

(ii) A_1 称为 A 的**核**，记作 $\mathrm{Ker}\,A$，即

$$\mathrm{Ker}\,A=\{u \mid A(u)=1\};$$

(iii) $A_0 \setminus A_1$ 称为 A 的边界，记作Bdry A，即

$$\text{Bdry}\, A = \{u \mid 0 < A(u) < 1\};$$

(iv) 具有非空核的 Fuzzy 集称为正规 Fuzzy 集，否则称为非正规 Fuzzy 集。

不难推出支承及核的下列性质。

(1) $\text{Supp}\phi = \text{Ker}\phi = \phi$，$\text{Supp}U = \text{Ker}U = U$；

(2) $\text{Supp}(\text{Supp}\, A) = \text{Supp}\, A$，$\text{Ker}(\text{Ker}\, A) = \text{Ker}\, A$；

(3) $A \cap B = \phi \Longleftrightarrow \text{Supp}\, A \cap \text{Supp}\, B = \phi$。

二、Fuzzy集合的分解定理

定义3 设 $A \in \mathscr{F}(U)$，$\alpha \in [0, 1]$.定义

$$(\alpha A)(u) = \alpha \wedge A(u)$$

称αA为数乘Fuzzy集。

显然，若$A \in \mathscr{P}(U)$，则$(\alpha A)(u) = \alpha \wedge \chi_A(u) = \alpha \chi_A(u)$。此外，还有

(1) $\alpha < \beta \Longrightarrow \alpha A \subseteq \beta A$；

(2) $A \subseteq B \Longrightarrow \alpha A \subseteq \alpha B$。

定理1 （第一分解定理）。设 $A \in \mathscr{F}(U)$。则

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_\alpha.$$

证 $$\left(\bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_\alpha\right)(u) = \bigvee_{\alpha \in [0,1]} (\alpha A_\alpha)(u)$$

$$= \bigvee_{\alpha \in [0,1]} \alpha \quad A_\alpha(u)$$

$$= \left[\bigvee_{\alpha \leqslant \underset{\sim}{A}(u)} \alpha \chi_{\underset{\sim}{A}_\alpha}(u)\right]$$

$$\vee \left[\bigvee_{\alpha > \underset{\sim}{A}(u)} \alpha \chi_{\underset{\sim}{A}_\alpha}(u)\right].$$

在第一个方括号中，$\underset{\sim}{A}(u) \geqslant \alpha$，故$u \in \underset{\sim}{A}_\alpha$从而$\chi_{\underset{\sim}{A}_\alpha}(u) = 1$.

因此

$$\left[\bigvee_{\alpha \leqslant \underset{\sim}{A}(u)} \alpha \chi_{\underset{\sim}{A}_\alpha}(u)\right] = \bigvee_{\alpha \leqslant \underset{\sim}{A}(u)} \alpha 1 = \underset{\sim}{A}(u).$$

在第二个方括号中，$\underset{\sim}{A}(u) < \alpha$，故$u \notin \underset{\sim}{A}_\alpha$，从而$\chi_{\underset{\sim}{A}_\alpha}(u) = 0$

因此

$$\left[\bigvee_{\alpha > \underset{\sim}{A}(u)} \alpha \chi_{\underset{\sim}{A}_\alpha}(u)\right] = \bigvee_{\alpha > \underset{\sim}{A}(u)} \alpha 0 = 0$$

这样我们有

$$\left(\bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \underset{\sim}{A}_\alpha\right)(u) = \underset{\sim}{A}(u)$$

即

$$\bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \underset{\sim}{A}_\alpha = \underset{\sim}{A}.$$ □

从证明过程中看出，等式

$$\underset{\sim}{A} = \bigcup_{\alpha \in (0,1)} \alpha \underset{\sim}{A}_\alpha = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \alpha \underset{\sim}{A}_\alpha = \bigcup_{\alpha \in [0,1)} \alpha \underset{\sim}{A}_\alpha$$

也是正确的。

由§2.1的讨论知道，Fuzzy集是普通集的推广，而Fuzzy集的α-截集又是普通集。分解定理开辟了用普通集构造Fuzzy集的途径，它反映了Fuzzy集与普通集的密切联系。

例2 设$\underset{\sim}{A} = \frac{0.5}{u_1} + \frac{0.6}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{0.7}{u_4} + \frac{0.3}{u_5}$，$\alpha \in [0, 1]$.

取 α- 截集，我们得到

$$\underset{\sim}{A}_1=\{u_3\},$$

$$\underset{\sim}{A}_{0.7}=\{u_3, u_4\},$$

$$\underset{\sim}{A}_{0.6}=\{u_2, u_3, u_4\},$$

$$\underset{\sim}{A}_{0.5}=\{u_1, u_2, u_3, u_4\},$$

$$\underset{\sim}{A}_{0.3}=\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}.$$

可将 α- 截集写成 Fuzzy 集的形式，例如：

$$\underset{\sim}{A}_{0.7}=\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4}.$$

这时，u_3，u_4 关于 $\underset{\sim}{A}_{0.7}$ 的隶属度都是 1，于是

$$1\underset{\sim}{A}_1=\frac{1}{u_3},$$

$$0.7\underset{\sim}{A}_{0.7}=\frac{0.7}{u_3}+\frac{0.7}{u_4},$$

$$0.6\underset{\sim}{A}_{0.6}=\frac{0.6}{u_2}+\frac{0.6}{u_3}+\frac{0.6}{u_4},$$

$$0.5\underset{\sim}{A}_{0.5}=\frac{0.5}{u_1}+\frac{0.5}{u_2}+\frac{0.5}{u_3}+\frac{0.5}{u_4},$$

$$0.3\underset{\sim}{A}_{0.3}=\frac{0.3}{u_1}+\frac{0.3}{u_2}+\frac{0.3}{u_3}+\frac{0.3}{u_4}+\frac{0.3}{u_5}.$$

利用第一分解定理构成原来的 Fuzzy 集：

$$\underset{\sim}{A}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\underset{\sim}{A}_\alpha=1\underset{\sim}{A}_1\cup 0.7\underset{\sim}{A}_{0.7}\cup 0.6\underset{\sim}{A}_{0.6}$$

$$\cup 0.5\underset{\sim}{A}_{0.5}\cup 0.3\underset{\sim}{A}_{0.3}$$

$$=\frac{1}{u_3}\cup\left(\frac{0.7}{u_3}+\frac{0.7}{u_4}\right)\cup\left(\frac{0.6}{u_2}+\frac{0.6}{u_3}+\frac{0.6}{u_4}\right)$$

$$\cup\left(\frac{0.5}{u_1}+\frac{0.5}{u_2}+\frac{0.5}{u_3}+\frac{0.5}{u_4}\right)$$

$$\cup\left(\frac{0.3}{u_1}+\frac{0.3}{u_2}+\frac{0.3}{u_3}+\frac{0.3}{u_4}+\frac{0.3}{u_5}\right)$$

$$=\frac{0.3\vee 0.5}{u_1}+\frac{0.3\vee 0.5\vee 0.6}{u_2}$$

$$+\frac{0.3\vee 0.5\vee 0.6\vee 0.7\vee 1}{u_3}$$

$$+\frac{0.3\vee 0.5\vee 0.6\vee 0.7}{u_4}+\frac{0.3}{u_5}$$

$$=\frac{0.5}{u_1}+\frac{0.6}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\frac{0.7}{u_4}+\frac{0.3}{u_5}.$$

类似于第一分解定理，可以证明

定理2 （第二分解定理）．设 $\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(U)$，则

$$\underset{\sim}{A}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\underset{\sim}{A}_{\alpha}=\bigcup_{\alpha\in[0,1)}\alpha\underset{\sim}{A}_{\alpha}.$$

除了这两个分解定理外，还有一个广泛得多的第三分解定理。

定理3 （第三分解定理） 给定 $\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(U)$ 以及一族普通集 $H(\lambda)$，$\lambda\in[0,1]$．只要 $\underset{\sim}{A}_{\underline{\lambda}}\subseteq H(\lambda)\subseteq \underset{\sim}{A}_{\lambda}$，那么

(1) $\underset{\sim}{A}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda)$；

(2) $\alpha<\beta\Longrightarrow H(\beta)\subseteq H(\alpha)$；

(3) $\underset{\sim}{A}_\alpha=\bigcap\limits_{\lambda<\alpha}H(\lambda) \qquad (\alpha>0)$；

(4) $\underset{\sim}{A}_{\underset{\cdot}{\alpha}}=\bigcup\limits_{\lambda>\alpha}H(\lambda) \qquad (\alpha<1)$。

证 (1)既然 $\underset{\sim}{A}_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq H(\lambda)\subseteq\underset{\sim}{A}_\lambda$，所以 $\lambda\underset{\sim}{A}_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq\lambda H(\lambda)\subseteq\lambda\underset{\sim}{A}_\lambda$。于是

$$\underset{\sim}{A}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\underset{\sim}{A}_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda)\subseteq\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\underset{\sim}{A}_\lambda=\underset{\sim}{A},$$

所以

$$\underset{\sim}{A}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda).$$

(2) 设$\alpha<\beta$。我们有

$$\underset{\sim}{A}_\beta=\{u\mid\underset{\sim}{A}(u)\geqslant\beta\}\subseteq\{u\mid\underset{\sim}{A}(u)>\alpha\}=\underset{\sim}{A}_{\underset{\cdot}{\alpha}}.$$

因此

$$H(\beta)\subseteq\underset{\sim}{A}_\beta\subseteq\underset{\sim}{A}_{\underset{\cdot}{\alpha}}\subseteq H(\alpha).$$

(3) 设 $\alpha>0$。任取 $\lambda<\alpha$。由 $\underset{\sim}{A}_\alpha\subseteq\underset{\sim}{A}_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq H(\lambda)$ 得出 $\underset{\sim}{A}_\alpha\subseteq\bigcup\limits_{\lambda<\alpha}H(\lambda)$。反过来，任取 $u\in\bigcap\limits_{\lambda<\alpha}H(\lambda)$。对每个 $\lambda<\alpha$ 均有 $u\in H(\lambda)\subseteq\underset{\sim}{A}_\lambda$。于是 $\underset{\sim}{A}(u)\geqslant\lambda$ 对每个 $\lambda<\alpha$ 恒成立。从而 $\underset{\sim}{A}(u)\geqslant\alpha$，即 $u\in\underset{\sim}{A}_\alpha$。所以 $\bigcup\limits_{\lambda<\alpha}H(\lambda)\subseteq\underset{\sim}{A}_\alpha$。总之，

$$\underset{\sim}{A}_\alpha=\bigcap_{\lambda<\alpha}H(\lambda).$$

(4) 设 $\alpha<1$，任取 $\lambda>\alpha$。由 $\underset{\sim}{A}_{\underset{\cdot}{\alpha}}\supseteq\underset{\sim}{A}_\lambda\supseteq H(\lambda)$ 得出 $\underset{\sim}{A}_{\underset{\cdot}{\alpha}}\supseteq\bigcup\limits_{\lambda>\alpha}H(\lambda)$。反过来，任取 $u\in\underset{\sim}{A}_{\underset{\cdot}{\alpha}}$，即 $\underset{\sim}{A}(u)>\alpha$。选择

λ_0适合不等式$\underset{\sim}{A}(u)>\lambda_0>\alpha$。于是$u\in \underset{\sim}{A}_{\lambda_0}\subseteq H(\lambda_0)\subseteq\bigcup_{\lambda>\alpha}H(\lambda)$。所以$\underset{\sim}{A}_\alpha\subseteq\bigcup_{\lambda>\alpha}H(\lambda)$。总之

$$\underset{\sim}{A}_\alpha=\bigcup_{\lambda>\alpha}H(\lambda) \qquad \square$$

第三分解定理证明，Fuzzy集$\underset{\sim}{A}$可由集合族$\{H(\lambda)|\lambda\in[0,1],\ \underset{\sim}{A}_\lambda\subseteq H(\lambda)\subseteq \underset{\sim}{A}_\lambda\}$唯一确定。$H(\lambda)$可以不是截集。因此同前两个分解定理相比，第三分解定理具有较大的灵活性，使用起来要方便些。

定理4 设$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(U)$。则$\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}$的充分必要条件是对每个$\alpha\in[0,1]$，$\underset{\sim}{A}_\alpha\subseteq\underset{\sim}{B}_\alpha$均成立。

证 必要性是明显的，现证充分性。设对任何$\alpha\in[0,1]$有$\underset{\sim}{A}_\alpha\subseteq\underset{\sim}{B}_\alpha$。任取$u\in U$。根据第一分解定理，

$$\underset{\sim}{A}(u)=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\alpha \underset{\sim}{A}_\alpha(u)\leqslant\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\alpha \underset{\sim}{B}_\lambda(u)=\underset{\sim}{B}(u)$$

因此，$\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}$。 $\square$

§ 2.5 Fuzzy集合的表现定理

Fuzzy集的分解定理指出，一个Fuzzy集确定一族普通集合，而且同一个Fuzzy集可以确定不同的普通集合族。本节反过来论述一族普通集合表现为一个Fuzzy集，这就是集合套的Fuzzy集表现定理。

定义1 设X是普通集合，$\mathscr{P}(X)$是X上的幂集。映

射

$$H: [0, 1] \to \mathscr{P}(X)$$

叫做 X 上的一个**集合套**，意思是指，对任何 $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ 有

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \Longrightarrow H(\lambda_2) \subseteq H(\lambda_1).$$

X 上的所有集合套构成的集合记作 $\mathscr{H}(X)$。

例1 设 $A \in \mathscr{F}(X)$，令映射

$$H_i: [0, 1] \to \mathscr{P}(X), \qquad i = 1, 2, \cdots, 5$$

分别为

$$H_1(\lambda) = A_\lambda = \{x \mid x \in X, \ A(x) \geqslant \lambda\},$$

$$H_2(\lambda) = A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \{x \mid x \in X, \ A(x) > \lambda\},$$

$$H_3(\lambda) = \phi,$$

$$H_4(\lambda) = X,$$

H_5 适合条件 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq A_\lambda$.

则 $H_i \in \mathscr{H}(X)$，$i = 1, 2, \cdots, 5$.

定义2 设 $H \in \mathscr{H}(X)$，$H_t \in \mathscr{H}(X)$，$t \in T$。在 $\mathscr{H}(X)$ 中规定运算 $\cup$，$\cap$，^{c} 如下

$$(\bigcup_{t \in T} H_t)(\lambda) = \bigcup_{t \in T} H_t(\lambda), \qquad \lambda \in [0, 1];$$

$$(\bigcap_{t \in T} H_t)(\lambda) = \bigcap_{t \in T} H_t(\lambda), \qquad \lambda \in [0, 1];$$

$$H^c(\lambda) = (H(1 - \lambda))^c, \qquad \lambda \in [0, 1]$$

这三个运算分别叫做集合套的并、交、补运算。

易知 $\bigcup_{t \in T} H_t$，$\bigcap_{t \in T} H_t$，$H^c \in \mathscr{H}(X)$。

由于集合套的并$\bigcup_{t\in T} H_t$及交$\bigcap_{t\in T} H_t$，最终分别归结为对每个λ值计算普通集合族的并集$\bigcup_{t\in T} H_t(\lambda)$，但是并不涉及其它，因此普通集合关于运算$\cup$，$\cap$的性质在$(\mathscr{H}(X),\ \cup,\ \cap)$中得以保留。例如集合套的交对集合套的并的分配律

$$H_1\cap(H_2\cup H_3)=(H_1\cap H_2)\cup(H_1\cap H_3)$$

可从普通集合的分配律

$$\begin{aligned}
&(H_1\cap(H_2\cup H_3))(\lambda)\\
&\quad=H_1(\lambda)\cap(H_2(\lambda)\cup H_3(\lambda))\\
&\quad=(H_1(\lambda)\cap H_2(\lambda))\cup(H_1(\lambda)\cup H_3(\lambda))\\
&\quad=((H_1\cap H_2)\cup(H_1\cap H_3))(\lambda)
\end{aligned}$$

获得保证，因此$(\mathscr{H}(X),\ \cup,\ \cap)$是分配格。回顾§1.5，这个分配格也可以记作$(\mathscr{H}(X),\ \subseteq)$，其中

$$\begin{aligned}
H_1\subseteq H_2 &\Longleftrightarrow H_1\cup H_2=H_2\\
&\Longleftrightarrow H_1\cap H_2=H_1.
\end{aligned}$$

不仅如此，明显地，$(\mathscr{H}(X),\ \cup,\ \cap)$还是完备的，最大元1及最小元0对任何$\lambda\in[0,\ 1]$，永远适合

$$1(\lambda)=X,\qquad 0(\lambda)=\phi.$$

对集合套的补H^c来说，情况完全两样。因为$H^c(\lambda)$涉及$H(1-\lambda)$。所以普通集合的补元律在$(\mathscr{H}(X),\ \cup,\ \cap)$中可能遭到破坏。

例2　设A是普通集X的一个非空真子集。令$H\in\mathscr{H}(X)$适合

$$H(\lambda)=\begin{cases}X & 0\leqslant\lambda\leqslant 0.4\\ A & 0.4<\lambda\leqslant 1\end{cases}$$

于是

$$(H \cap H^c)(0.4) = H(0.4) \cap H^c(0.4)$$
$$= H(0.4) \cap (H(0.6))^c$$
$$= X \cap A^c = A^c$$

由此可见，$H \cap H^c \neq 0$，所以集合套的补不满足补元律。

定理1 $(\mathscr{H}(X)$，$\cup$，$\cap$，$^c)$ 是一个完备的软代数。

证 刚才已指出 $(\mathscr{H}(X)$，$\cup$，$\cap$，$^c)$ 是完备的分配格。现在着手检查复原律及对偶律。为此，任取 H，$H_t \in \mathscr{H}(X)$，$t \in T$。

首先，对任何 $\lambda \in [0, 1]$，我们有

$$(H^c)^c(\lambda) = (H^c(1-\lambda))^c$$
$$= ((H(\lambda)^c)^c) = H(\lambda)$$

因此 $(H^c)^c = H$，即复原律成立。

其次，

$$(\bigcup_{t\in T} H_t)^c(\lambda) = ((\bigcup_{t\in T} H_t)(1-\lambda))^c$$
$$= \bigcap_{t\in T} (H_t(1-\lambda))^c$$
$$= \bigcap_{t\in T} H_t{}^c(\lambda) = (\bigcap_{t\in T} H_t{}^c)(\lambda).$$

因此 $(\bigcup_{t\in T} H_t)^c = \bigcap_{t\in T} H_t{}^c$。用类似的方法推出 $(\bigcap_{t\in T} H_t)^c = \bigcup_{t\in T} H^c{}_t$。

因此对偶律也成立。

总而言之，$(\mathscr{H}(X)$，$\cup$，$\cap$，$^c)$是完备的软代数。 □

今后，当集合族 $\{A_t \mid A_t \subset \mathscr{P}(X)$，$t \in T\}$ 的指标集 T 为空集 ϕ 时，依惯例约定

$$\bigcup_{t\in\phi} A_t = \phi, \qquad \bigcap_{t\in\phi} A_t = X.$$

引理 1 映射 $\varphi: \mathscr{H}(X) \to \mathscr{F}(X)$，$H \longmapsto \bigcup\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha H(\alpha)$

对任何 $\lambda \in [0, 1]$ 均适合

(1) $(\varphi(H))_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq (\varphi(H))_\lambda$,

(2) $(\varphi(H))_\lambda = \bigcap\limits_{\alpha<\lambda} H(\alpha)$,

(3) $(\varphi(H))_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup\limits_{\alpha>\lambda} H(\alpha)$.

证 首先对任何 $x \in (\varphi(H))_{\underset{\cdot}{\lambda}}$，我们有

$$\varphi(H)(x) > \lambda$$

$$\Longrightarrow \bigvee_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \wedge H(\alpha)(x)) > \lambda$$

$$\Longrightarrow \exists\ \alpha_0 \in [0, 1] \text{ 使 } \alpha_0 \wedge H(\alpha_0)(x) > \lambda$$

$$\Longrightarrow \alpha_0 > \lambda \quad \text{且} \quad x \in H(\alpha_0).$$

因为 $H(\alpha_0) \subseteq H(\lambda)$，所以 $x \in H(\lambda)$。这样得到了 $(\varphi(H))_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda)$。

其次，对任何 $x \in H(\lambda)$，我们有

$$H(\lambda)(x) = 1,$$

于是

$$\varphi(H)(x) = \bigvee_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \wedge H(\alpha)(x))$$

$$\geqslant \lambda \wedge H(\lambda)(x) = \lambda.$$

所以 $x \in (\varphi(H))_\lambda$。这样得到了 $H(\lambda) \subseteq (\varphi(H))_\lambda$。总之 (1) 是正确的。

最后，由于 $(\varphi(H))_{\underset{\cdot}{\alpha}} \subseteq H(\alpha) \subseteq (\varphi(H))_\alpha$，根据第三分解定理并考虑到刚才的约定，直接得到

$$(\varphi(H))_\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha), \quad \lambda\in[0, 1];$$

$$(\varphi(H))_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\alpha<\lambda} H(\alpha), \quad \lambda\in[0, 1].$$

这就是（2）及（3）。 □

定理2 （Fuzzy 集表现定理）映射

$$\varphi: \mathscr{H}(X) \longrightarrow \mathscr{F}(X), \ H \longmapsto \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha H(\alpha)$$

是从完备的软代数（$\mathscr{H}(X)$，∪，∩，^{c}）到完备的软代数（$\mathscr{F}(X)$，∪，∩，^{c}）的同态满射。

证 任取$\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(X)$。令$H(\lambda)=\underset{\sim}{A}_\lambda$。则$H\in\mathscr{H}(X)$，并且

$$\varphi(H) = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda H(\lambda) = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda \underset{\sim}{A}_\lambda = \underset{\sim}{A}.$$

可见映射φ具有满性。

着手证明映射φ保持运算。对任何$\lambda\in[0, 1]$，我们根据引理1得到

$$(\varphi(\bigcup_{t\in T} H_t))_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\alpha>\lambda}(\bigcup_{t\in T} H_t)(\alpha)$$

$$= \bigcup_{\alpha>\lambda}\bigcup_{t\in T} H_t(\alpha) = \bigcup_{t\in T}\bigcup_{\alpha>\lambda} H_t(\alpha)$$

$$= \bigcup_{t\in T}(\varphi(H_t))_{\underset{\cdot}{\lambda}} = (\bigcup_{t\in T}\varphi(H_t))_{\underset{\cdot}{\lambda}}$$

由第二分解定理知

$$\varphi(\bigcup_{t\in T} H_t) = \bigcup_{t\in T}\varphi(H_t)$$

可见映射φ保持运算∪。还有

$$(\varphi(\bigcap_{t\in T} H_t))_\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda}(\bigcap_{t\in T} H_t)(\alpha)$$

$$=\bigcap_{\alpha<\lambda}\bigcap_{t\in T}H_t(\alpha)=\bigcap_{t\in T}\bigcap_{\alpha<\lambda}H_t(\alpha)$$

$$\doteq\bigcap_{t\in T}(\varphi(H_t))_\lambda=(\bigcap_{t\in T}\varphi(H_t))_\lambda$$

由第一分解定理知

$$\varphi(\bigcap_{t\in T}H_t)=\bigcap_{t\in T}\varphi(H_t)$$

可见映射φ保持运算$\cap$．最后，

$$(\varphi(H^c))_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}H^c(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}(H(1-\lambda))^c$$

$$=(\bigcup_{\alpha<\lambda}H(1-\alpha))^c=(\bigcup_{1-\alpha>1-\lambda}H(1-\alpha))^c$$

$$=((\varphi(H))_{1-\lambda})^c=((\varphi(H))^c)_\lambda$$

再次由第一分解定理知

$$\varphi(H^c)=(\varphi(H))^c$$

可见映射φ保持运算^c，

总之，φ的确是从$\mathscr{H}(X)$到$\mathscr{F}(X)$的同态满射，也可以写作

$$(\mathscr{H}(X),\cup,\cap,{}^c)\overset{\varphi}{\sim}(\mathscr{F}(X),\cup,\cap,{}^c).\qquad\square$$

表现定理指出，每个Fuzzy集都是某个集合套在同态满射φ下的像，而集合套的运算则由普通集合的运算来确定．因此我们可以由普通集合的运算性质来推导相应Fuzzy集的运算性质．

例 3　给定一族Fuzzy集$A^{(t)}\in\mathscr{F}(X)$，$t\in T\neq\phi$，求证

(1)　$\bigcup_{t\in T}A^{(t)}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(\bigcup_{t\in T}A^{(t)})$；

(2)　$\bigcup_{t\in T}A^{(t)}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(\bigcup_{t\in T}A_\lambda^{(t)})$；

(3) $\bigcap_{t\in T}\underset{\sim}{A}^{(t)}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(\bigcap_{t\in T}\underset{\sim}{A}_{\lambda}^{(t)})$;

(4) $\bigcap_{t\in T}\underset{\sim}{A}^{(t)}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(\bigcap_{t\in T}\underset{\sim}{A}_{\lambda}^{(t)})$.

证 (1) 令$H^{(t)}\in\mathscr{H}(X)$，$H^{(t)}(\lambda)=\underset{\sim}{A}_{\lambda}^{(t)}$. 根据表现定理，我们有 $\varphi(H^{(t)})=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha H^{(t)}(\alpha)=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\underset{\sim}{A}_{\alpha}^{(t)}=\underset{\sim}{A}^{(t)}$. 并且

$$\bigcup_{t\in T}\underset{\sim}{A}^{(t)}=\bigcup_{t\in T}\varphi(H^{(t)})=\varphi(\bigcup_{t\in T}H^{(t)})$$

$$=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(\bigcup_{t\in T}H^{(t)})(\lambda)$$

$$=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(\bigcup_{t\in T}H^{(t)}(\lambda))$$

$$=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(\bigcup_{t\in T}\underset{\sim}{A}_{\lambda}^{(t)}).$$

(2) 令$H^{(t)}\in\mathscr{H}(X)$，$H^{(t)}(\lambda)=\underset{\sim}{A}_{\lambda}^{(t)}$. 根据表现定理，我们有$\varphi(H^{(t)})=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha H^{(t)}(\alpha)=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\underset{\sim}{A}_{\alpha}^{(t)}=\underset{\sim}{A}^{(t)}$. 并且

$$\bigcup_{t\in T}\underset{\sim}{A}^{(t)}=\bigcup_{t\in T}\varphi(H^{(t)})=\varphi(\bigcup_{t\in T}H^{(t)})$$

$$=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(\bigcup_{t\in T}H^{(t)})(\lambda)$$

$$=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(\bigcup_{t\in T}H^{(t)}(\lambda))$$

$$=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(\bigcup_{t\in T}\underset{\sim}{A}_{\lambda}^{(t)}).$$

类似地推导(3)及(4)。

例 4 给定一族 Fuzzy 集$\underset{\sim}{A}^{(t)}\in\mathscr{F}(X)$，$t\in T\neq\phi$，求证

(1) $(\bigcup_{t\in T}\underset{\sim}{A}^{(t)})_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}(\bigcup_{t\in T}\underset{\sim}{A}_\alpha^{(t)})$;

(2) $(\bigcap_{t\in T}\underset{\sim}{A}^{(t)})_\lambda=\bigcup_{\alpha>\lambda}(\bigcap_{t\in T}\underset{\sim}{A}_\alpha^{(t)})$.

证 令$H^{(t)}\in\mathscr{H}(X)$, $H^{(t)}(\lambda)=\underset{\sim}{A}_\lambda^{(t)}$.我们已在例3之(1)中推出了等式

$$\bigcup_{t\in T}\underset{\sim}{A}^{(t)}=\varphi(\bigcup_{t\in T}H^{(t)}).$$

于是根据引理1之(2)得到

$$(\bigcup_{t\in T}\underset{\sim}{A}^{(t)})_\lambda=(\varphi(\bigcup_{t\in T}H^{(t)}))_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}(\bigcup_{t\in T}H^{(t)})(\alpha)$$

$$=\bigcap_{\alpha<\lambda}(\bigcup_{t\in T}H^{(t)}(\alpha))$$

这就是

$$(\bigcup_{t\in T}\underset{\sim}{A}^{(t)})_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}(\bigcup_{t\in T}\underset{\sim}{A}^{(t)}_\alpha).$$

同法证明余下的等式。 □

§2.6 Fuzzy集合的同构定理

上节的Fuzzy集表现定理指出$(\mathscr{F}(X),\cup,\cap,^c)$是完备的软代数$(\mathscr{H}(X),\cup,\cap,^c)$在同态满射$\varphi$下的像，$\mathscr{F}(X)=\varphi(\mathscr{H}(X))$。本节在此基础上进一步构造$\mathscr{H}(X)$的商代数$(\mathscr{H}(X)/\sim,\ \cup,\cap,^c)$使得$(\mathscr{F}(X),\ \cup,\ \cap,\ ^c)$与这个商代数同构，这就是Fuzzy集的同构定理。

定义1 设H_1, $H_2\in\mathscr{H}(X)$.所谓H_1与H_2符合关系$\sim$，记着$H_1\sim H_2$，意思是指，对任何$\alpha\in[0,1]$，均有

$$\bigcap_{\lambda<\alpha} H_1(\lambda) = \bigcap_{\lambda<\alpha} H_2(\lambda).$$

其中$\bigcap_{\lambda<0} H(\lambda) = X$。

明显地，$\sim$是$\mathscr{H}(X)$上的等价关系：

(1)　$H \sim H$；

(2)　$H_1 \sim H_2 \Longrightarrow H_2 \sim H_1$；

(3)　$H_1 \sim H_2$ 且 $H_2 \sim H_3 \Longrightarrow H_1 \sim H_3$.

令$\mathscr{F}'(X)$为等价商集，

$$\mathscr{F}'(X) = \mathscr{H}(X)/\sim = \{[H] \mid H \in \mathscr{H}(X)\}$$

其中等价类

$$[H] = \{H' \mid H \sim H'\}.$$

定理1　每个集合套$H \in \mathscr{H}(X)$都适合等式

(1)　$\bigcup_{\lambda>\alpha} H(\lambda) = \bigcup_{\lambda>\alpha} \bigcap_{\beta<\lambda} H(\beta)$；

(2)　$\bigcap_{\lambda<\alpha} H(\lambda) = \bigcap_{\lambda<\alpha} \bigcup_{\beta>\lambda} H(\beta)$.

其中 $\bigcup_{\lambda>1} H(\lambda) = \phi$，$\bigcap_{\lambda<0} H(\lambda) = X$.

证　(1)　设 $\beta<\lambda$。则 $H(\lambda) \subseteq H(\beta)$。从而

$$H(\lambda) \subseteq \bigcap_{\beta<\lambda} H(\beta).$$

于是

$$\bigcup_{\lambda>\alpha} H(\lambda) \subseteq \bigcup_{\lambda>\alpha} \bigcap_{\beta<\lambda} H(\beta).$$

反过来，对每个 $\lambda>\alpha$，存在 λ' 及 β 使 $\alpha<\lambda'<\beta<\lambda$。因此

$$H(\beta) \subseteq H(\lambda').$$

于是

$$\bigcap_{\beta<\lambda} H(\beta) \subseteq H(\lambda').$$

从而

$$\bigcup_{\lambda>\alpha} \bigcap_{\beta<\lambda} H(\beta) \subseteq \bigcup_{\lambda>\alpha} H(\lambda').$$

由于$\bigcup_{\lambda>\alpha} H(\lambda') = \bigcup_{\lambda>\alpha} H(\lambda)$，所以

$$\bigcup_{\lambda>\alpha} \bigcap_{\beta<\lambda} H(\beta) \subseteq \bigcup_{\lambda>\alpha} H(\lambda).$$

总之，等式$\bigcup_{\lambda>\alpha} H(\lambda) = \bigcup_{\lambda>\alpha} \bigcap_{\beta<\lambda} H(\beta)$的确成立。

(2) 设 $\beta>\lambda$。则 $H(\beta)\subseteq H(\lambda)$。从而

$$\bigcup_{\beta>\lambda} H(\beta) \subseteq H(\lambda).$$

于是

$$\bigcap_{\lambda<\alpha} \bigcup_{\beta>\lambda} H(\beta) \subseteq \bigcap_{\lambda<\alpha} H(\lambda).$$

反过来，对每个$\lambda<\alpha$，存在β及λ'使$\lambda<\beta<\lambda'<\alpha$．因此

$$H(\lambda')\subseteq H(\beta).$$

于是

$$H(\lambda') \subseteq \bigcup_{\beta>\lambda} H(\beta).$$

从而

$$\bigcap_{\lambda<\alpha} H(\lambda') \subseteq \bigcap_{\lambda<\alpha} \bigcup_{\beta>\lambda} H(\beta).$$

由于 $\bigcap_{\lambda<\alpha} H(\lambda') = \bigcup_{\lambda<\alpha} H(\lambda)$，所以

$$\bigcap_{\lambda<\alpha} H(\lambda) \subseteq \bigcap_{\lambda<\alpha} \bigcup_{\beta>\lambda} H(\beta)$$

总之，等式$\bigcap_{\lambda<\alpha} H(\lambda) = \bigcap_{\lambda<\alpha} \bigcup_{\beta>\lambda} H(\beta)$的确成立。 □

定理2 $H_1 \sim H_2$ 的充分必要条件是，对任何 $\alpha \in [0,1]$，

$$\bigcup_{\lambda>\alpha} H_1(\lambda) = \bigcup_{\lambda>\alpha} H_2(\lambda),$$

其中 $\bigcup_{\lambda>1} H(\lambda) = \phi$。

证 设 $H_1 \sim H_2$。于是$\bigcap_{\beta<\lambda} H_1(\beta) = \bigcap_{\beta<\lambda} H_2(\beta)$。应用定理1之(1)得

$$\bigcap_{\lambda>\alpha} H_1(\lambda) = \bigcup_{\lambda>\alpha} \bigcap_{\beta<\lambda} H_1(\beta)$$

$$= \bigcup_{\lambda>\alpha} \bigcap_{\beta<\lambda} H_2(\beta) = \bigcup_{\lambda>\alpha} H_2(\lambda).$$

反过来，设$\bigcup_{\lambda>\alpha} H_1(\lambda) = \bigcup_{\lambda>\alpha} H_2(\lambda)$。应用定理1之(2)得

$$\bigcap_{\beta<\alpha} H_1(\beta) = \bigcap_{\beta<\alpha} \bigcup_{\lambda>\beta} H_1(\lambda)$$

$$= \bigcap_{\beta<\alpha} \bigcup_{\lambda>\beta} H_2(\lambda) = \bigcap_{\beta<\alpha} H_2(\beta).$$

因此 $H_1 \sim H_2$。 □

定理3 设$H \sim H'$，$H_t \sim H'_t$，$t \in T$。则

$\bigcup_{t\in T} H_t \sim \bigcup_{t\in T} H'_t$，$\bigcap_{t\in T} H_t \sim \bigcap_{t\in T} H'_t$，$H^c \sim H'^c$。

证 设$H_t \sim H'_t$，$t \in T$。由定理2得

$$\bigcup_{\alpha>\lambda} H_t(\alpha) = \bigcup_{\alpha>\lambda} H'_t(\alpha)$$

从而

$$\bigcup_{\alpha>\lambda}(\bigcup_{t\in T}H_t)(\alpha)=\bigcup_{\alpha>\lambda}\bigcup_{t\in T}H_t(\alpha)=\bigcup_{t\in T}\bigcup_{\alpha>\lambda}H_t(\alpha)$$

$$=\bigcup_{t\in T}\bigcup_{\alpha>\lambda}H'_t(\alpha)=\bigcup_{\alpha>\lambda}\bigcup_{t\in T}H'_t(\alpha)$$

$$=\bigcup_{\alpha>\lambda}(\bigcup_{t\in T}H'_t)(\alpha)$$

再次由定理2知

$$\bigcup_{t\in T}H_t\sim\bigcup_{t\in T}H'_t.$$

仍设$H_t\sim H'_t$, $t\in T$。我们有

$$\bigcap_{\alpha<\lambda}H_t(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}H'_t(\alpha)$$

从而

$$\bigcap_{\alpha<\lambda}(\bigcap_{t\in T}H_t)(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}\bigcap_{t\in T}H_t(\alpha)=\bigcap_{t\in T}\bigcap_{\alpha<\lambda}H_t(\alpha)$$

$$=\bigcap_{t\in T}\bigcap_{\alpha<\lambda}H'_t(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}\bigcap_{t\in T}H'_t(\alpha)$$

$$=\bigcap_{\alpha<\lambda}\left(\bigcap_{t\in T}H'_t\right)(\alpha).$$

于是

$$\bigcap_{t\in T}H_t\sim\bigcap_{t\in T}H'_t.$$

最后设$H\sim H'$。根据定理2

$$\bigcup_{\alpha>\lambda}H(\alpha)=\bigcup_{\alpha>\lambda}H'(\alpha).$$

从而

$$\bigcap_{\alpha<\lambda}H^c(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}(H(1-\alpha))^c$$

$$=(\bigcup_{1-\alpha>1-\lambda}H'(1-\alpha))^c$$

$$=(\bigcup_{1-\alpha>1-\lambda}H'(1-\alpha))^c$$

$$\bigcap_{\alpha<\lambda}(H'(1-\alpha))^c=\bigcap_{\alpha<\lambda}H'^c(\alpha).$$

于是

$$H^c\sim H'^c. \qquad \square$$

定义2 设$[H]$，$[H_t]\in\mathscr{F}'(X)$，$t\in T$。在等价商集$\mathscr{F}'(X)$上规定并$\bigcup$、交$\bigcap$、补^{c}如下

$$\bigcup_{t\in T}[H_t]=[\bigcup_{t\in T}H_t],$$

$$\bigcap_{t\in T}[H_t]=[\bigcap_{t\in T}H_t],$$

$$[H]^c=[H^c].$$

$\mathscr{F}'(X)$上的并、交、补运算虽然一律通过每个等价类的代表来实施，但运算结果其实与代表的选择无关。比方以集合套等价类的补而论，设$[H]=[H']$。则$H\sim H'$。由定理3得出$H^c\sim H'^c$。于是$[H^c]=[H'^c]$，换言之，$[H]^c=[H']^c$。不仅如此，正是由于集合套等价类的运算通过等价类的代表来实施，所以$\mathscr{H}(X)$的运算性质全部遗传给$\mathscr{F}'(X)$。由此得知$(\mathscr{F}'(X),\cup,\cap,^c)$也是一个完备的软代数。

定理4 （同构定理）$(\mathscr{F}'(X),\cup,\cap,^c)$与$(\mathscr{F}(X),\cup,\cap,^c)$是同构的完备软代数。

证 借助表现定理

$$(\mathscr{H}(X),\cup,\cap,^c)\overset{\varphi}{\sim}(\mathscr{F}(X),\cup,\cap,^c)$$

$$\varphi(H)=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha H(\alpha)$$

引进映射

$$\omega: \mathscr{F}'(X) \to \mathscr{F}(X), \qquad [H] \longmapsto \varphi(H).$$

首先证明 $\omega([H])$与如何选择等价类$[H]$的代表无关。为此，设$H \sim H'$。也就是对任何 $\alpha \in [0,1]$，设$\bigcap_{\lambda<\alpha} H(\lambda) = \bigcap_{\lambda<\alpha} H'(\alpha)$。由上节引理1知$(\varphi(H))_\alpha = (\varphi(H'))_\alpha$，因而 $\varphi(H) = \varphi(H')$ 即 $\omega([H]) = \omega([H'])$。

其次证明映射 ω 具有单性。设 $\omega([H_1]) = \omega([H_2])$，也就是 $\varphi(H_1) = \varphi(H_2)$。仍由上节引理1知等式$\bigcap_{\alpha<\lambda} H_1(\alpha) = \bigcap_{\alpha<\lambda} H_2(\alpha)$ 对任何 $\lambda \in [0,1]$均成立。因此$H_1 \sim H_2$。故$[H_1] = [H_2]$。

因为映射 φ 具有满性，所以映射 ω 具有满性是显然的。

接着检查映射 ω 能否保持运算 $\cup, \cap, ^c$。

$$\omega(\bigcup_{t\in T}[H_t]) = \omega([\bigcup_{t\in T} H_t]) = \varphi(\bigcup_{t\in T} H_t)$$

$$= \bigcup_{t\in T}\varphi(H_t) = \bigcup_{t\in T}\omega([H_t]).$$

可见 ω 的确保持运算 $\cup$。同理推出

$$\omega(\bigcap_{t\in T}[H_t]) = \bigcap_{t\in T}\omega([H_t]).$$

最后，

$$\omega([H]^c) = \omega([H^c]) = \varphi(H^c)$$

$$= (\varphi(H))^c = (\omega([H]))^c.$$

概括起来，

$$(\mathscr{F}'(X), \cup, \cap, ^c) \overset{\omega}{\cong} (\mathscr{F}(X), \cup, \cap, ^c). \qquad \square$$

同构的代数系统可以看作是同一的。从今以后，Fuzzy 集与集合套的等价类已不必加以区别。这便为 Fuzzy 集的理

论研究开辟了一条新途径。

§2.7 Fuzzy 集合的模糊度与贴近度

一. Fuzzy 集合的模糊度

Fuzzy 集是作为处理模糊现象的一种数学工具而引进的。因此 Fuzzy 集本身天然地体现了模糊性。本节所论的模糊度便是对 Fuzzy 集的模糊程度的一种量度。

定义1 适合下列四条件的映射

$$d: \mathscr{F}(U)\to[0,1]$$

称为$\mathscr{F}(U)$上的模糊程度定量化函数。条件是

(i) $d(\underset{\sim}{A})=0$ 当且仅当 $\underset{\sim}{A}$为U上的普通集;

(ii) $d(\underset{\sim}{A})$达到最大值当且仅当 $\underset{\sim}{A}$的隶属函数值处处等于 0.5;

(iii) 对每个$u\in U$,如果$\underset{\sim}{B}(u)\leqslant\underset{\sim}{A}(u)<0.5$或$\underset{\sim}{B}(u)\geqslant\underset{\sim}{A}(u)>0.5$, 则$d(\underset{\sim}{A})\geqslant d(\underset{\sim}{B})$;

(iv) $d(\underset{\sim}{A})=d(\underset{\sim}{A}^c)$.

这四个条件的直觉背景如下。

条件(i)表明普通集是不模糊的。

条件(ii)表明隶属度处处等于 0.5 的 Fuzzy 集是最模糊的;因为在相反情况下的隶属度也处处等于 0.5, 即 $\underset{\sim}{A}^c(u)=1-\underset{\sim}{A}(u)=0.5$, 因而对这两种情况不知该怎样决策才好。

条件(iii)表明,隶属函数的值越靠近 0.5 时,Fuzzy 集就越模糊,离开 0.5 越远则越清晰。

条件(iv)表明，$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{A}^c$的模糊程度是相同的，因为$|A(u)-0.5|=|A^c(u)-0.5|$，即$\underset{\sim}{A}(u)$与$A^c(u)$到0.5的距离相等。

非常明显，模糊程度定量化函数的功能是用以衡量每个Fuzzy集的模糊程度的高低．$d(\underset{\sim}{A})$的值越接近0，表示$\underset{\sim}{A}$越接近普通集。$d(A)$的值越大，表示A越接近隶属度处处等于0.5的Fuzzy集。因此，$d(\underset{\sim}{A})$叫做$\underset{\sim}{A}$的模糊度。

在有限论域的情况下，Fuzzy集的模糊度以下列一般数学形式出现。

定理1 设$\underset{\sim}{A}$是论域$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$上的Fuzzy集，又$c_1,c_2,\cdots,c_n$都是正实数。如果映射$f_i:[0,1]\to[0,+\infty)$，$i=1,2,\cdots,n$满足条件

(1) $f_i(0)=0$;

(2) $f_i(x)=f_i(1-x)$;

(3) f_i在$[0,\frac{1}{2}]$严格增加。

又映射$g:[0,a]\to[0,1]$严格增加，其中$a=\sum_{j=1}^{n}c_if_i(0.5)$且$g(0)=0$。那么

$$d(\underset{\sim}{A})=g\left(\sum_{i=1}^{n}c_if_i(A(u_i))\right)$$

是Fuzzy集$\underset{\sim}{A}$的Fuzzy度。

可以直接验证这样确定的 d 满足定义 1 的四个条件。若 g 是线性的，即若 $g(x)=kx(k>0)$，则还有

$$d(\underset{\sim}{A})+d(\underset{\sim}{B})=d(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})+d(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}).$$

下面介绍两个 Fuzzy 集之间的距离。

设 $\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(U)$，$U=\{u_1, u_2\cdots, u_n\}$，$p$ 为正实数。称

$$M(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})=\left[\sum_{i=1}^{n}\left|\underset{\sim}{A}(u_i)-\underset{\sim}{B}(u_i)\right|^p\right]^{1/p}$$

为 A 与 B 之间的明可夫斯基距离。当 $U=[a, b]$ 是有限区间时，明可夫斯基距离为

$$M(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})=\left[\int_a^b\left|\underset{\sim}{A}(u)-\underset{\sim}{B}(u)\right|^p du\right]^{1/p}.$$

称

$$M'(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})=\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\underset{\sim}{A}(u_i)-\underset{\sim}{B}(u_i)\right|^p\right]^{1/p}$$

或

$$M'(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})=\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b\left|\underset{\sim}{A}(u)-\underset{\sim}{B}(u)\right|^p du\right]^{1/p}$$

为 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 之间的相对明可夫斯基距离。

当 $p=1$ 时，明可夫斯基距离称为汉明(Hamming)距离；当 $p=2$ 时，明可夫斯基距离称为欧几里得距离。

Fuzzy 集的模糊度有一种具体形式同明可夫斯基距离有

密切联系。在定理 1 中，令$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 1$，令

$$f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_n(x) = \begin{cases} x^p & 0 \leqslant x < 0.5 \\ (1-x)^p & 0.5 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

又取 $g(x) = 2\left(\frac{x}{n}\right)^{1/p}$，$0 \leqslant x \leqslant a$，$a = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(0.5)$。易知这样的$c_i$，$f_i$，$g$满足定理1的全部条件。因此$\underset{\sim}{A}$的模糊度

$$\begin{aligned} d(\underset{\sim}{A}) &= g\left(\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(\underset{\sim}{A}(u_i))\right) \\ &= g\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(\underset{\sim}{A}(u_i))\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(\underset{\sim}{A}(u_i))\right)^{1/p} \\ &= \frac{2}{n^{1/p}}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(\underset{\sim}{A}(u_i))\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

当 $\underset{\sim}{A}(u_i) < 0.5$，　$f_i(\underset{\sim}{A}(u_i)) = (\underset{\sim}{A}(u_i))^p = \left|\underset{\sim}{A}(u_i) - \underset{\sim}{A}_{0.5}(u_i)\right|^p$，

当 $\underset{\sim}{A}(u_i) \geqslant 0.5$，　$f_i(\underset{\sim}{A}(u_i)) = (1 - \underset{\sim}{A}(u_i))^p = \left|\underset{\sim}{A}(u_i)\right.$

$$- A_{0.5}(u_i) \Big|^p.$$

所以

$$d(A)=\frac{2}{n^{1/p}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|A(u_i)-A_{0.5}(u_i)\right|^p\right)^{1/p}.$$

这便得到了 Fuzzy 集的模糊度的一种具体形式。它实质上是 A 与 $A_{0.5}$ 之间的明可夫斯基距离。因此通常叫做 A 的明可夫斯基模糊度。当 $p=1$ 及 $p=2$ 时，明可夫斯基模糊度照例改称汉明模糊度以及欧几里得模糊度。

例 1　给定 $A=\frac{0.9}{a}+\frac{0.9}{b}+\frac{0.1}{c}+\frac{0.9}{d}$,

$$B=\frac{0.3}{a}+\frac{0}{b}+\frac{0.1}{c}+\frac{0}{d}.$$

计算它们的汉明模糊度以及欧几里得模糊度。

汉明模糊度

$$d_H(A)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|A(u_i)-A_{0.5}(u_i)\right|.$$

欧几里得模糊度

$$d_E(A)=\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(A(u_i)-A_{0.5}(u_i)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

对本例而言，

$$A_{0.5}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{0}{c}+\frac{1}{d},$$

$$B_{0.5}=\frac{0}{a}+\frac{0}{b}+\frac{0}{c}+\frac{0}{d}.$$

于是

$$d_H(A)=\frac{2}{4}(0.1+0.1+0.1+0.1)=0.2;$$

$$d_H(B)=\frac{2}{4}(0.3+0+0.1+0)=0.2.$$

$$d_E(A)=\frac{2}{\sqrt{4}}\sqrt{0.1^2+0.1^2+0.1^2+0.1^2}=0.2;$$

$$d_E(B)=\frac{2}{\sqrt{4}}\sqrt{0.3^2+0^2+0.1^2+0^2}=0.316.$$

从直觉上看，A，B有明显的差异，$d_E(A)<d_E(B)$似乎较$d_H(A)=d_H(B)$合理些。d_H采用线性迭加的算法虽较简便，但效果不及d_E采取非线性迭加的算法。

模糊度的另一种具体形式叫做 Fuzzy 熵。熵本是热力学中的一个概念，原意是热量可以转变为功的程度，是描述分子无规则运动的一种度量。信息论中用它作为剩余信息量大小的一种度量。Fuzzy 集用它作为模糊程度的度量。

现在考虑所谓申农(Shannon)函数 S：$[0,1]\to[0,+\infty)$

$$S(x)=-x\ln x-(1-x)\ln(1-x)$$

约定 $S(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}S(x)=0$，$S(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}S(x)=0$.很容易看到，申农函数具有下列性质：

（1） 在[0,1]上处处连续；

（2） $S(x)=S(1-x)$；

（3） $\left[0,\frac{1}{2}\right]$上严格增加。

在定理1中取 $c_1=c_2=\cdots=c_n=1$， $f_1(x)=f_2(x)=\cdots f_n(x)=S(x)$， 又令 $g(x)=\frac{1}{n\ln 2}x$， $0\leqslant x\leqslant a$，

$a=\sum_{i=1}^{n}c_if_i(0.5)=n\ln 2$。由对 c_i， f_i， g 完全满足定理1所要求的条件，因此 $\underset{\sim}{A}$ 的模糊度

$$
\begin{aligned}
d(\underset{\sim}{A}) &= g\left(\sum_{i=1}^{n}c_if_i(\underset{\sim}{A}(u_i))\right) \\
&= g\left(\sum_{i=1}^{n}S(\underset{\sim}{A}(u_i))\right) \\
&= \frac{1}{n\ln 2}\sum_{i=1}^{n}S(\underset{\sim}{A}(u_i)) \\
&= \frac{1}{n\ln 2}\sum_{i=1}^{n}-\underset{\sim}{A}(u_i)\ln\underset{\sim}{A}(u_i) \\
&\qquad -\underset{\sim}{A}^C(u_i)\ln\underset{\sim}{A}^C(u_i).
\end{aligned}
$$

这种形式的模糊度叫做申农模糊度，也叫做Fuzzy熵，记作 $\tilde{H}(\underset{\sim}{A})$。

二．Fuzzy集的贴近度

上面谈的是 Fuzzy 集的模糊度，与此相仿，引进 Fuzzy 集的贴近度。所谓贴近度乃是权衡两个 Fuzzy 集彼此靠近程度的一种标尺。

定义 2 映射 N: $\mathscr{F}(U)\to[0,1]$ 叫做 U 上的 Fuzzy 集的贴近度函数，意思是说它满足下列条件

(i) $N(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})=N(\underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{A})$;

(ii) $N(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{A})=1$;

(iii) $\underset{\sim}{C}\subseteq\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{A}\Rightarrow N(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{C})\leqslant N(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})\wedge N(\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{C})$.

函数值 $N(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})$ 叫做 Fuzzy 集 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的**贴近度**。

由定义得知，贴近度也是一项原则性概念，其具体形式视实际需要而定。设 $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(U)$. 当有限论域 $U=\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$，常见的形式有

（1） 距离贴近度。

$$N(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})=1-\frac{1}{n^{1/p}}\left[\sum_{i=1}^{n}\left|\underset{\sim}{A}(u_i)-\underset{\sim}{B}(u_i)\right|^{p}\right]^{1/p}, (p>0).$$

N 满足贴近度的全部条件。当 $p=1$ 及 $p=2$ 时，这种贴近度依惯例叫做汉明贴近度及欧几里得贴近度。

（2） 最小最大贴近度。

$$N(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})=\frac{\sum_{i=1}^{n}\underset{\sim}{A}(u_i)\wedge\underset{\sim}{B}(u_i)}{\sum_{i=1}^{n}\underset{\sim}{A}(u_i)\vee\underset{\sim}{B}(u_i)}, \quad (设\ \underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}\neq\phi).$$

这个 N 也满足贴近度的全部条件。当 $\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}\in\mathscr{P}(U)$ 时，最小最大贴近度蜕化为

$$N(A,\ B)=\frac{A\cap B\text{的元素个数}}{A\cup B\text{的元素个数}}.$$

（3） 最小平均贴近度。

$$N(\underset{\sim}{A},\ \underset{\sim}{B})=\frac{\sum_{i=1}^{n}\underset{\sim}{A}(u_i)\wedge\underset{\sim}{B}(u_i)}{\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\underset{\sim}{A}(u_i)+\underset{\sim}{B}(u_i)\right)},\quad (\text{设}\ \underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}\neq\phi)$$

这个 N 也满足贴近度的全部条件。当 $\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}\in\mathscr{P}(U)$时，最小平均贴近度蜕化为

$$N(A,\ B)=\frac{A\cap B\text{的元素个数的两倍}}{A\text{的元素个数}+B\text{的元素个数}}.$$

当论域 $U=[a,b]$，还可引进测度贴近度这种具体形式。

（4） 测度贴近度。

约定用字母 I 代表实数轴上的任何有限区间，包括开的、闭的、半开半闭的以及只含一个元素的区间。设 $\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}([a,b])$的每个 α—截集可以写成

$$\underset{\sim}{A}_\alpha=\bigcup_{k\in K}I_k.$$

在这样的条件下，令

$$m(\underset{\sim}{A}_\alpha)=\operatorname{Inf}\{\text{所有}\ I_k\ \text{的长度之和}\},$$

$$\|\underset{\sim}{A}\|=\frac{2}{b-a}\int_0^1\alpha m(\underset{\sim}{A}_\alpha)d\alpha,$$

$$N(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})=\begin{cases}\dfrac{\|\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}\|}{\|\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}\|} & \text{当}\|\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}\|\neq 0\\ 0\ , & \text{当}\|\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}\|=0\end{cases}$$

$m(\underset{\sim}{A}_\alpha)$叫做 A_α的测度，$\|\underset{\sim}{A}\|$叫做$\underset{\sim}{A}$的模，$N(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})$叫做$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$的测度贴近度。$N(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})$明显地适合定义2的头两个条件。需要检查的是条件(iii)。设$\underset{\sim}{C}\subseteq\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{A}$。

当$\|\underset{\sim}{A}\|$，$\|\underset{\sim}{B}\|$，$\|\underset{\sim}{C}\|$三者之中至少有一为0时，则由明显的不等式$\|\underset{\sim}{C}\|\leqslant\|\underset{\sim}{B}\|\leqslant\|\underset{\sim}{A}\|$得知$\|\underset{\sim}{C}\|=0$。因而不论$\|\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{C}\|$是否等于0都必然有$N(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{C})=0$，所以$N(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})=0\leqslant N(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})\wedge N(\underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{C})$自动成立。当$\|\underset{\sim}{A}\|$，$\|\underset{\sim}{B}\|$，$\|\underset{\sim}{C}\|$三者之中无一为0时，则

$$N(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{C})=\frac{\|\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{C}\|}{\|\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{C}\|}=\frac{\|\underset{\sim}{C}\|}{\|\underset{\sim}{A}\|}$$

$$N(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})=\frac{\|\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}\|}{\|\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}\|}=\frac{\|\underset{\sim}{B}\|}{\|\underset{\sim}{A}\|}\geqslant N(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{C})$$

$$N(\underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{C})=\frac{\|\underset{\sim}{B}\cap\underset{\sim}{C}\|}{\|\underset{\sim}{B}\cup\underset{\sim}{C}\|}=\frac{\|\underset{\sim}{C}\|}{\|\underset{\sim}{B}\|}\geqslant N(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{C})$$

因此$N(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{C})\leqslant N(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})\wedge N(\underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{C})$照样成立。

例 2 设$U=[0,1]$，$\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(U)$的隶属函数为

$$\underset{\sim}{A}(u)=u^2$$

计算测度贴近度 $N(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{A}^c)$。

首先画出 $\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{A}^c$ 的隶属函数曲线(图1)

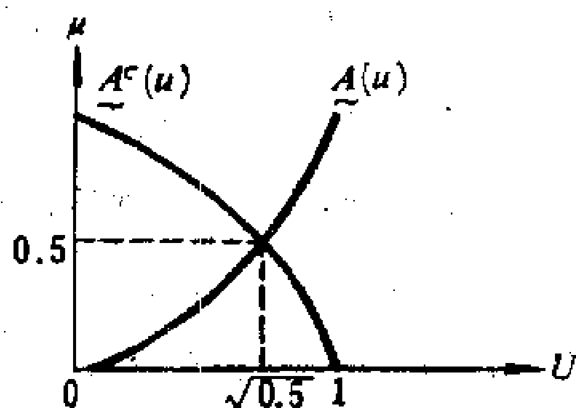


图 1

我们有

$$(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{A}^c)(u)=\begin{cases}u^2 & 0\leqslant u\leqslant\sqrt{0.5}\\ 1-u^2 & \sqrt{0.5}<u\leqslant 1,\end{cases}$$

$$(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{A}^c)(u)=\begin{cases}1-u^2 & 0\leqslant u\leqslant\sqrt{0.5}\\ u^2 & \sqrt{0.5}<u\leqslant 1.\end{cases}$$

于是

$$(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{A}^c)_\alpha=\begin{cases}[\sqrt{\alpha},\ \sqrt{1-\alpha}] & 0\leqslant\alpha\leqslant 0.5\\ \phi & 0.5<\alpha\leqslant 1,\end{cases}$$

$$\|\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{A}^c\|=2\int_0^{0.5}\alpha(\sqrt{1-\alpha}-\sqrt{\alpha})d\alpha=0.06;$$

$$(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{A}^c)_\alpha=\begin{cases}[0,1] & 0\leqslant\alpha\leqslant 0.5\\ [0,\sqrt{1-\alpha}]\cup[\sqrt{\alpha},1] & 0.5<\alpha\leqslant 1,\end{cases}$$

$$\|\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{A}^c\|=2\Big[\int_0^{0.5}\alpha d\alpha$$

$$+\int_0^{0.5}\alpha(\sqrt{1-\alpha}+1-\alpha)d\alpha]=0.67.$$

所以

$$N(\underset{\sim}{A},\ \underset{\sim}{A}^c)=\frac{\|\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{A}^c\|}{\|\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{A}^c\|}=\frac{0.06}{0.67}=0.09$$

这说明，Fuzzy 集$\underset{\sim}{A}$靠近 Fuzzy 集$\underset{\sim}{A}^c$的程度是很低的。

§2.8 Fuzzy 集合的内积与外积

有限论域上的 Fuzzy 集可以写成 Fuzzy 向量的形式。设$\underset{\sim}{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$， $\underset{\sim}{B}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$.仿照线性代数中的向量内积算法，我们把

$$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B}=\bigvee_{k=1}^{n}(a_k\wedge b_k)$$

叫做$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$的内积。这里，乘积·及加法+已被置换为$\wedge$及$\vee$。

推广到任意论域 X 上的 Fuzzy 集，我们有

定义 1 设$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(X)$。称

$$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B}=\bigvee_{x\in X}(\underset{\sim}{A}(x)\wedge\underset{\sim}{B}(x))$$

为 Fuzzy 集$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$的**内积**。

内积的对偶运算为外积。

定义 2 设$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(X)$。称

$$\underset{\sim}{A}\hat{\circ}\underset{\sim}{B}=\bigwedge_{x\in X}(\underset{\sim}{A}(x)\vee\underset{\sim}{B}(x))$$

为 Fuzzy 集$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$的**外积**。

性质 1 $(\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{B})^c = \underset{\sim}{A}^c \hat{\circ} \underset{\sim}{B}^c$，

$(\underset{\sim}{A} \hat{\circ} \underset{\sim}{B})^c = \underset{\sim}{A}^c \circ \underset{\sim}{B}^c$。

证 先看第一个式子

$$(\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{B})^c = 1 - \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{B} = 1 - \bigvee_{x \in X} (\underset{\sim}{A}(x) \wedge \underset{\sim}{B}(x)).$$

对任何 $x \in X$，有

$$1 - \bigvee_{x \in X} (\underset{\sim}{A}(x) \wedge \underset{\sim}{B}(x)) \leqslant 1 - (\underset{\sim}{A}(x) \wedge \underset{\sim}{B}(x)).$$

从而

$$1 - \bigvee_{x \in X} (\underset{\sim}{A}(x) \wedge \underset{\sim}{B}(x)) \leqslant \bigwedge_{x \in X} [1 - (\underset{\sim}{A}(x) \wedge \underset{\sim}{B}(x))].$$

假若这个不等式中的等号不能成立的话，那么

$$1 - \bigvee_{x \in X} (\underset{\sim}{A}(x) \wedge \underset{\sim}{B}(x)) < \bigwedge_{x \in X} [1 - (\underset{\sim}{A}(x) \wedge \underset{\sim}{B}(x))],$$

即

$$1 - \bigwedge_{x \in X} [1 - (\underset{\sim}{A}(x) \wedge \underset{\sim}{B}(x))] < \bigvee_{x \in X} (\underset{\sim}{A}(x) \wedge \underset{\sim}{B}(x)).$$

于是存在 $x_0 \in X$ 使

$$1 - \bigwedge_{x \in X} [1 - (\underset{\sim}{A}(x) \wedge \underset{\sim}{B}(x))] < \underset{\sim}{A}(x_0) \wedge \underset{\sim}{B}(x_0).$$

这便导出了不合理的结果，

$$1 - (\underset{\sim}{A}(x_0) \wedge \underset{\sim}{B}(x_0)) < \bigwedge_{x \in X} [1 - (\underset{\sim}{A}(x) \wedge \underset{\sim}{B}(x))].$$

因此等号非成立不可．故

$$(\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{B})^c = 1 - \bigvee_{x \in X} (\underset{\sim}{A}(x) \wedge \underset{\sim}{B}(x))$$

$$= \bigwedge_{x \in X} [1 - (\underset{\sim}{A}(x) \wedge \underset{\sim}{B}(x))]$$

$$=\bigwedge_{x\in X}[(1-A(x))\vee(B(x))]$$

$$=A^{c}\mathbin{\hat{\circ}}B^{c}.$$

同法证明第二个等式。 □

明显地，还成立着

性质 2 $A\circ B=B\circ A$, $A\mathbin{\hat{\circ}}B=B\mathbin{\hat{\circ}}A$；

性质 3 $A\subseteq B\Longrightarrow A\circ C\leqslant B\circ C$ 并且

$$A\mathbin{\hat{\circ}}C\leqslant B\mathbin{\hat{\circ}}C;$$

性质 4 $A\circ A^{c}\leqslant\frac{1}{2}$, $A\mathbin{\hat{\circ}}A^{c}\geqslant\frac{1}{2}$.

对$A\in\mathscr{F}(X)$。令

$$\bar{a}=\bigvee_{x\in X}A(x),\qquad \underline{a}=\bigwedge_{x\in X}A(x).$$

$\bar{a}$及$\underline{a}$分别叫做 Fuzzy 集的峰值和谷值。易知

性质 5 $A\circ A=\bar{a}$, $A\mathbin{\hat{\circ}}A=\underline{a}$；

性质 6 $A\circ B\leqslant\bar{a}\wedge\bar{b}$, $A\mathbin{\hat{\circ}}B\geqslant\underline{a}\vee\underline{b}$；

性质 7 $A\subseteq B\Longrightarrow A\circ B=\bar{a}$, $A\mathbin{\hat{\circ}}B=\underline{b}$；

性质 8 $\bigvee\limits_{B\in\mathscr{F}(x)}(A\circ B)=\bar{a}$, $\bigwedge\limits_{B\in\mathscr{F}(x)}(A\mathbin{\hat{\circ}}B)=\underline{a}$.

在集合$\{a_t|a_t\in[0,1], t\in T\}$中，当指标集$T=\phi$时，约定

$$\bigvee_{t\in\phi}a_t=0,\qquad \bigwedge_{t\in\phi}a_t=1.$$

性质 9 设$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{A}^{(t)}\in\mathscr{F}(X)$，$t\in T$。则

$$\underset{\sim}{A}\circ\left(\bigcup_{t\in T}\underset{\sim}{A}^{(t)}\right)=\bigvee_{t\in T}\left(\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{A}^{(t)}\right),$$

$$\underset{\sim}{A}\,\widehat{\circ}\left(\bigcap_{t\in T}\underset{\sim}{A}^{(t)}\right)=\bigwedge_{t\in T}\left(\underset{\sim}{A}\,\widehat{\circ}\,\underset{\sim}{A}^{(t)}\right).$$

证 以第一个式子为例。

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{A}\circ\left(\bigcup_{t\in T}\underset{\sim}{A}^{(t)}\right)&=\bigvee_{x\in X}\left[\underset{\sim}{A}(x)\wedge\left(\bigcup_{t\in T}\underset{\sim}{A}^{(t)}\right)(x)\right]\\&=\bigvee_{x\in X}\left[\underset{\sim}{A}(x)\wedge\left(\bigvee_{t\in T}\underset{\sim}{A}^{(t)}(x)\right)\right]\\&=\bigvee_{x\in X}\bigvee_{t\in T}\left[\underset{\sim}{A}(x)\wedge\underset{\sim}{A}^{(t)}(x)\right]\\&=\bigvee_{t\in T}\bigvee_{x\in X}\left[\underset{\sim}{A}(x)\wedge\underset{\sim}{A}^{(t)}(x)\right]\\&=\bigvee_{t\in T}\left(\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{A}^{(t)}\right).\end{aligned}$$ □

由性质 5 及性质 6 看出，对于给定的$\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(X)$，Fuzzy 集$\underset{\sim}{B}$靠近$\underset{\sim}{A}$则令内积$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B}$增大而令外积$\underset{\sim}{A}\,\widehat{\circ}\,\underset{\sim}{B}$减少；因而可以尝试利用$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B}$及$\underset{\sim}{A}\,\widehat{\circ}\,\underset{\sim}{B}$的值来表示$\underset{\sim}{B}$靠近$\underset{\sim}{A}$的程度。

引理 1 设$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(X)$。令

$$(\underset{\sim}{A},\ \underset{\sim}{B})=(\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B})\wedge(\underset{\sim}{A}\,\widehat{\circ}\,\underset{\sim}{B})^c.$$

则下列结论均成立。

(1) $0\leqslant(\underset{\sim}{A},\ \underset{\sim}{B})\leqslant 1$,

(2) $(\underset{\sim}{A},\ \underset{\sim}{B})=(\underset{\sim}{B},\ \underset{\sim}{A})$,

(3) $(\underset{\sim}{A},\ \underset{\sim}{A})=\overline{a}\wedge(1-\underline{a})$,

(4) $\underset{\sim}{C} \subseteq \underset{\sim}{B} \subseteq \underset{\sim}{A} \Longrightarrow (\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{C}) \leqslant (\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) \wedge (\underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{C})$.

证 (1)，(2)，(3)都是明显的。现证(4)

根据性质 7，由 $\underset{\sim}{C} \subseteq \underset{\sim}{A}$ 得

$$(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{C}) \wedge (\underset{\sim}{A} \mathbin{\hat{\circ}} \underset{\sim}{C})^c = \bar{c} \wedge (\underline{a})^c;$$

由 $\underset{\sim}{B} \subseteq \underset{\sim}{A}$ 得

$$(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = (\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{B}) \wedge (\underset{\sim}{A} \mathbin{\hat{\circ}} \underset{\sim}{B})^c = \bar{b} \wedge (\underline{a})^c.$$

因为 $\bar{c} \leqslant \bar{a}$，所以

$$(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{C}) \leqslant (\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}).$$

同理知

$$(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{C}) \leqslant (\underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{C}).$$

于是

$$(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{C}) \leqslant (\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) \wedge (\underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{C}). \qquad \square$$

比较引理 1 以及 §2.7 定义 2，立即得到

定理 1 令

$$\mathscr{F}(X;\ 1,\ 0) = \{\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{A} \in \mathscr{F}(X),\ \ \bar{a} = 1,\ \ \underline{a} = 0\}.$$

如果 $\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B} \in \mathscr{F}(X;\ 1,\ 0)$，则

$$(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = (\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{B}) \wedge (\underset{\sim}{A} \mathbin{\hat{\circ}} \underset{\sim}{B})^c$$

是 Fuzzy 集 $\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$ 的贴近度，叫做 $\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$ 的格贴近度。

例 1 已知论域 X 为实数轴 $\boldsymbol{R}$，设 Fuzzy 集 $\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B} \in \mathscr{F}(X)$ 都具有正态型隶属函数

$$\underset{\sim}{A}(x) = e^{-\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}, \qquad \underset{\sim}{B}(x) = e^{-\left(\frac{x-\beta}{\tau}\right)^2}.$$

验算$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$的格贴近度

$$(\underset{\sim}{A},\ \underset{\sim}{B}) = e^{-\left(\frac{\alpha-\beta}{\sigma+\tau}\right)^2}.$$

首先，明显地$\bar{a} = \underset{\sim}{A}(\alpha)=1$，$\underline{a} = \lim\limits_{x\to\infty}\underset{\sim}{A}(x)=0$，$\bar{b} = \underset{\sim}{B}(\beta)=1$，$\underline{b} = \lim\limits_{x\to\infty}\underset{\sim}{B}(x)=0$。因此利用$(\underset{\sim}{A},\ \underset{\sim}{B})$的值来作贴近度是合适的．此外

$$\underset{\sim}{A} \hat{\circ} \underset{\sim}{B} = \bigwedge_{x\in R}(\underset{\sim}{A}(x)\vee \underset{\sim}{B}(x))=0,$$

故

$$(\underset{\sim}{A},\ \underset{\sim}{B})=(\underset{\sim}{A}\circ \underset{\sim}{B})\wedge(\underset{\sim}{A}\hat{\circ}\underset{\sim}{B})^c = \underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B}.$$

画出$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$的隶属函数曲线见图 1。易知$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B}$应为两曲线交点处的纵坐标，即

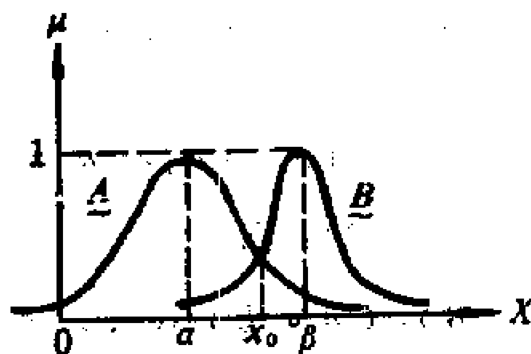


图 1

$$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{A}(x_0).$$

其中x_0介于α、B之间且适合方程

$$\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right)^2 = \left(\frac{x-\beta}{\tau}\right)^2.$$

解出 $x_0=\frac{\alpha\tau+\beta\sigma}{\sigma+\tau}$．于是

$$(A, B)=A\circ B=e^{-\left(\frac{x_0-\alpha}{\sigma}\right)^2}=e^{-\left(\frac{\alpha-\beta}{\sigma+\tau}\right)^2}.$$

§2.9 隶属原则与择近原则

随着计算机技术的蓬勃发展，近年来兴起了一门新型的技术科学叫模式识别，其中心内容是利用电脑识别出我们感兴趣的对象与哪个完美的模型类同。模式识别作为人工智能的一个重要方面，需要处理广泛的对象，包括侦察卫星遥感图中的军事设施、邮政自动分拣系统中的信件、物理探矿中的岩层结构、海洋渔场声纳图中的鱼群等等。模式识别使用多种方法，部分研究人员汲取人脑思维活动的特点，在模式识别中引进 Fuzzy 集，取得了若干理论成果并收到实际效益。

本节通过两个例子说明模糊数学在模式识别中的应用，进一步的例子以后就会谈到。

给定 n 个模型，它们表示为论域 U 上的 Fuzzy 集 $A^{(1)}$，$A^{(2)}$，…，$A^{(n)}\in\mathscr{F}(U)$。$u_0\in U$是一个待识别的具体对象。这时我们可以根据下述隶属原则断定 u_0 属于哪一个模型。

隶属原则 给定 $A^{(i)}\in\mathscr{F}(U)$，$i=1, 2, \cdots, n$。又 $u_0\in U$。如果

$$A^{(i)}(u_0)=\text{Max}\{A^{(1)}(u_0), A^{(2)}(u_0)\cdots, A^{(n)}(u_0)\}$$

那么可以认为 u_0 应划归 $A^{(i)}$ 这一类。

例1　三角形的识别

在模式识别的现实课题中，常常把问题归结为几何图形的识别。因此讨论三角形的分类是有实际意义的。在此，我们利用形状的相似性作为三角形分类的准则，并以内角表征三角形的形状。这样考虑可使三角形不因放大、缩小、平移、旋转、反射等变换而影响相似性。

令所有待考察的三角形构成论域U。

$U=\{(A,B,C)\mid A\geqslant B\geqslant C\geqslant 0,\ A+B+C=180°\}$。

其中A，B，C分别代表三角形三内角的度数，从大到小排列。设我们有四个模型：正三角形、等腰三角形、直角三角形、非典型的三角形。这四个模型本来具备严密的几何定义，但在现实课题中是模糊的，不能要求绝对准确，所以作为Fuzzy集处理，依次记作$\underset{\sim}{E}$，$\underset{\sim}{I}$，$\underset{\sim}{R}$，$\underset{\sim}{T}\in\mathscr{F}(U)$。

正三角形$\underset{\sim}{E}$的隶属函数规定为

$$\underset{\sim}{E}(u)=1-\frac{1}{180}(A-C),$$

这样规定的理由是，当$A=B=C$时$\underset{\sim}{E}(U)=1$，当$A\approx180°$，$B\approx0°$，$C\approx0°$时$\underset{\sim}{E}(u)\approx0$。

等腰三角形$\underset{\sim}{I}$的隶属函数规定为

$$\underset{\sim}{I}(u)=1-\frac{1}{60}\mathrm{Min}\{A-B,\ B-C\},$$

这样规定的理由是，当$A=B$或$B=C$时$\underset{\sim}{I}(u)=1$。当$A\approx120°$，$B\approx60°$，$C\approx0°$时，$\underset{\sim}{I}(u)\approx0$。

直角三角形$\underset{\sim}{R}$的隶属函数规定为

$$\underset{\sim}{R}(u)=1-\frac{1}{90}|A-90|,$$

理由是，当 $A=90°$ 时 $\underset{\sim}{R}(u)=1$，当 $A\approx180°$，$B\approx0°$，$C\approx0°$ 时 $\underset{\sim}{R}(u)\approx0$。

至于非典型三角形 $\underset{\sim}{T}$，则有

$$\underset{\sim}{T}=(\underset{\sim}{E}\cup\underset{\sim}{I}\cup\underset{\sim}{R})^c=\underset{\sim}{E}^c\cap\underset{\sim}{I}^c\cap\underset{\sim}{R}^c.$$

考察一个具体的三角形 $u_1=(63°,\ 59°,\ 58°)$，计算它对四个 Fuzzy 集的隶属度

$$\underset{\sim}{E}(u_1)=0.9722\qquad \underset{\sim}{I}(u_1)=0.9833\qquad \underset{\sim}{R}(u_1)=0.7$$

$$\underset{\sim}{T}(u_1)=\underset{\sim}{E}^c(u_1)\wedge\underset{\sim}{I}^c(u_1)\wedge\underset{\sim}{R}^c(u_1)=0.0167$$

按照隶属原则，应把 u_1 判定为近似于等腰三角形。

再考察另一个具体的三角形 $u_2=(91°,\ 45°,\ 44°)$，计算出

$$\underset{\sim}{E}(u_2)=0.7389\qquad \underset{\sim}{I}(u_2)=0.9833\qquad \underset{\sim}{R}(u_2)=0.9889$$

$$\underset{\sim}{T}(u_2)=\underset{\sim}{E}^c(u_2)\wedge\underset{\sim}{I}^c(u_2)\wedge\underset{\sim}{R}^c(u_2)=0.0111$$

按照隶属原则，应把 u_2 判定为近似于直角三角形。由于 $\underset{\sim}{I}(u_2)\approx\underset{\sim}{R}(u_2)$，所以也可以把 u_2 判定为近似于等腰直角三角形。

模式识别的另一种方法不用隶属度而改用贴近度。其依据是下述

择近原则　给定 $\underset{\sim}{A}^{(1)},\ \underset{\sim}{A}^{(2)},\ \cdots,\ \underset{\sim}{A}^{(n)}\in\mathscr{F}(U)$，又 $\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(U)$。如果

$$N(\underset{\sim}{A}^{(i)}, \underset{\sim}{B}) = \text{Max}\{N(\underset{\sim}{A}^{(1)}, \underset{\sim}{B}), N(\underset{\sim}{A}^{(2)}, \underset{\sim}{B}), \cdots, N(\underset{\sim}{A}^{(n)}, \underset{\sim}{B})\}$$

那么可以断定$\underset{\sim}{B}$与$\underset{\sim}{A}^{(i)}$同类。

隶属原则与择近原则的区别在于，前者将待识别的对象视为论域中的确定元素，后者将待识别的对象视为论域上的Fuzzy集。

例2 点阵文字的识别

点阵文字是拉丁字母及阿拉伯数字的一种表示法。所谓点阵文字就是将每个字母或数字等分成$m \times n$个小方格，然后在每个小方格中或者填上全黑色，或者空成全白色，如图1及图2。前者是字母H，后者是数字6。这里我们将每个字符等分成$7 \times 5 = 35$个小方格。

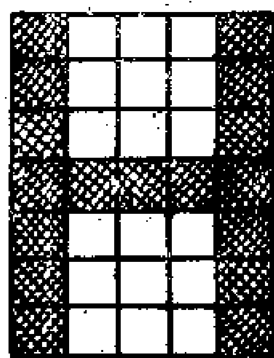


图1

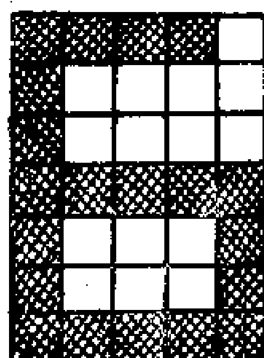


图2

约定把暗色小方格记作1，白色小方格记作0，并按照先从左到右，后从上到下的次序把35个小方格排成行向量。于是字母H所对应的行向量为

$$H = (10001\ 10001\ 10001\ 11111\ 10001\ 10001\ 10001),$$

数字 6 所对应的行向量为

6＝(11110 10000 10000 11111 10001 10001 11111)。

这些向量是标准的，每个小方格或者全黑，或者全白，所以我们把这样的向量叫做标准向量。然而，实际上由于打印时着色不均匀以及可能产生污点，会使实际的点阵文字变成非标准的，通过传感器所获得的信息就不会和标准向量一致。

使用电脑识别点阵文字时，通常总是把 37 个标准向量置于内存中，包括 26 个字母 A，B，…，Z，10 个数字 0，1，…9，1 个空白符号 $\varnothing$。对于每个待识别的点阵文字，则通过光电输入接受每个小方格的信息，由于打印的缺陷，这些信息不一定为 0 或 1，往往介于 0，1 之间。我们把打印缺陷等偶然因素叫做噪声，我们要解决的问题就在于消除噪声干扰，获得正确的识别结果。

以下是 P.P.Wang 等人曾经用过的方法。考察点阵文字向量

$$\alpha=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_{35}) \qquad \alpha_i\in[0,1],$$

$$\beta=(\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_{35}) \qquad \beta_i\in[0,1].$$

计算数值

$$W(\alpha,\ \beta)=\sum_{i=1}^{35}((\alpha_i\wedge\beta_i)\vee(\alpha_i^c\wedge\beta_i^c)).$$

这个数值当然不满足贴近度的全部要求，但用来近似地衡量 α 与 β 的接近程度还是有效的。假设电脑收到点阵文字向量 $r=(r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_{35})$，只要算出 r 与 37 个标准向量的接近程度 $W(A,\ r)$，$W(B,\ r)$，…，$W(\varnothing,\ r)$，便可仿照贴近度原则判定 r 究竟是什么。

实验结果是：在噪声达到 31.43% 的情况下，正确识别率大于 90%。

第三章　Fuzzy关系

§3.1　Fuzzy 关系的基本概念

客观事物之间除了有关系与没有关系之外，还存在着密切关系、疏远关系等等模糊概念。因此把普通集合上的关系扩充到 Fuzzy 集上去是需要的。

给定论域U，V，可以用$U\times V$上的 Fuzzy 集 $\underset{\sim}{R}\in\mathscr{F}(U\times V)$来规定一个 Fuzzy 关系。对$\forall(u,v)\in U\times V$，未必能明确回答$u$与$v$是否有关系$\underset{\sim}{R}$，但可以用$(u,v)$对$\underset{\sim}{R}$的隶属度$R(u,v)$表达$u$，$v$满足关系$R$的程度。

定义1　给定论域U，V，直积$U\times V$上的 Fuzzy 集 $\underset{\sim}{R}\in\mathscr{F}(U\times V)$称为从$U$到$V$的一个 Fuzzy 关系，隶属度$\underset{\sim}{R}(u,v)$称为$u$，$v$对 Fuzzy 关系$\underset{\sim}{R}$的相关程度。当$U=V$时，$\underset{\sim}{R}\in\mathscr{F}(U\times U)$又叫做$U$上的 Fuzzy 关系。

例1　设$U=\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$表示赵、钱、孙、李四个人的集合，$V=\{v_1, v_2\}$表示A、B两种文学作品的集合。

$$R=\frac{0.9}{(u_1,v_1)}+\frac{0.8}{(u_1,v_2)}+\frac{0.4}{(u_2,v_1)}$$

$$+\frac{0.1}{(u_2,v_2)}+\frac{0.6}{(u_3,v_1)}+\frac{0.8}{(u_3,v_2)}$$

$$+\frac{0.2}{(u_4,v_1)}+\frac{0.7}{(u_4,v_2)}$$

确定了从U到V的一个 Fuzzy 关系。例如$R(u_1,v_1)=0.9$可

解释为赵对作品 A 相当熟悉，而 $R(u_4,v_1)=0.2$ 表示李对作品A不太熟悉。

例2 设论域U是实数轴。给定U上的"远远大于"关系，记作R。

$$R(x,y)=\begin{cases}0 & \text{当 } x\leqslant y\\ \left[1+\dfrac{100}{(x-y)^2}\right]^{-1} & \text{当 } x>y\end{cases}$$

R是U上的一个 Fuzzy 关系。

隶属度$R(1,0)=0.01$ 表示"1 远远大于 0"的程度仅为0.01，而$R(100,0)=0.99$ 表示"100远远大于 0"的程度为 0.99。

根据定义，从U到V的 Fuzzy 关系其实是$U\times V$上的 Fuzzy 集的别名，因此 Fuzzy 关系的运算、α-截集、模糊度的计算方法等等都可以参照 Fuzzy 集的有关规定进行。比方说，设R，$R^{(t)}\in\mathscr{F}(U\times V)$，$t\in T$，我们有

$$(\bigcup_{t\in T}R^{(t)})(u,v)=\bigvee_{t\in T}R^{(t)}(u,v),$$

$$(\bigcap_{t\in T}R^{(t)})(u,v)=\bigwedge_{t\in T}R^{(t)}(u,v),$$

$$R^c(u,v)=1-R(u,v).$$

再如 Fuzzy 关系的第二分解定理可以写为

$$R=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda R_{\lambda}.$$

诸如此类。

定义2 设$R\in\mathscr{F}(U\times U)$，

(i) $\underset{\sim}{R}$叫做具有 Fuzzy 自反性，或者说$\underset{\sim}{R}$是 Fuzzy 自反关系，意想是指，每个 $u\in U$ 都能使 $\underset{\sim}{R}(u,u)=1$. $\underset{\sim}{R}$ 叫做具有Fuzzy 反自反性，或者说$\underset{\sim}{R}$ 是 Fuzzy 反自反关系，意思是指，每个 $u\in U$ 都能使 $\underset{\sim}{R}(u,u)=0$. $\underset{\sim}{R}$ 叫做具有 Fuzzy 弱反自反性，或者说$\underset{\sim}{R}$ 是 Fuzzy 弱自反关系，意思是指，不等式$\underset{\sim}{R}(u,u)\geqslant\underset{\sim}{R}(u,v)$对任何 $u, v\in U$都成立。

(ii) $\underset{\sim}{R}$ 叫做具有 Fuzzy 对称性，或者说$\underset{\sim}{R}$ 是 Fuzzy 对称关系，意想是指，对任何 $u,v\in U$，等式$\underset{\sim}{R}(u,v)=\underset{\sim}{R}(v,u)$都成立。

(iii) $\underset{\sim}{R}$ 叫做具有Fuzzy 反对称性，或者说$\underset{\sim}{R}$ 是 Fuzzy 反对称关系，意想是指，由$\underset{\sim}{R}(u,v)=\underset{\sim}{R}(v,u)\neq 0$ 必可推出 $u=v$. $\underset{\sim}{R}$ 叫做具有Fuzzy 完全反对称性，或者说$\underset{\sim}{R}$ 是 Fuzzy 完全反对称关系，意想是指，由$\underset{\sim}{R}(u,v)\wedge\underset{\sim}{R}(v,u)\neq 0$ 必可推出 $u=v$.

容易发现，Fuzzy 自反关系必为 Fuzzy 弱自反关系，并且当 $R\in\mathscr{P}(U\times U)$是普通关系时，Fuzzy 自反性蜕化为普通自反性. 其次 Fuzzy 对称性是普通对称性的自然引伸。再其次，Fuzzy 完全反对称关系必为 Fuzzy 反对称关系，并且普通关系的反对称性是它们的特殊情况。

显而易见，U 上的 Fuzzy 关系 $\underset{\sim}{R}$具有完全反对称性的充

分必要条件是，对 $\forall u, v\in U$，由 $u\neq v$ 及 $R(u,v)>0$ 必可推出 $R(v,u)=0$。

引理1 给定普通关系 $R\in\mathscr{P}(U\times U)$。那么 R 具有传递性的充分必要条件是不等式

$$R(u,w)\geqslant\bigvee_{v\in U}[R(u,v)\wedge R(v,w)]$$

对任何 $u, w\in U$ 永远成立，式中的 $R(u,w)$ 是特征函数值 $\chi_R(u,w)$ 的简写。

证 必要性。设 R 具有普通传递性。任取 $u, w\in U$。

如果每个 $v\in U$ 都不能使 $(u,v)\in R$，$(v,w)\in R$ 同时成立，那么 $R(u,v)\wedge R(v,w)=0$，从而

$$R(u,w)\geqslant 0=\bigvee_{v\in U}[R(u,v)\wedge R(v,w)].$$

如果存在 $v_0\in U$ 使 $(u,v_0)\in R$，$(v_0,w)\in R$ 同时成立，那么根据 R 的传递性知 $(u,w)\in R$，即 $R(u,w)=1$。从而

$$R(u,w)=1\geqslant\bigvee_{v\in U}[R(u,v)\wedge R(v,w)].$$

总之，上述不等式在任何情况下都成立。

充分性。设上述不等式对任何 $u, w\in U$ 都成立。给定 $(u,v_0)\in R$ 及 $(v_0,w)\in R$。于是由

$$R(u,w)\geqslant\bigvee_{v\in U}[R(u,v)\wedge R(v,w)]$$

$$\geqslant R(u,v_0)\wedge R(v_0,w)$$

得出 $R(u,w)=1$，即 $(u,w)\in R$。由此可见，R 具有普通传递性。 □

根据引理1引进 Fuzzy 传递关系的定义。

定义3 $R\in\mathscr{F}(U\times U)$ 叫做具有 Fuzzy 传递性，或者说

$\underset{\sim}{R}$ 是 Fuzzy 传递关系，意思是指，对任何 $u,w\in U$，不等式

$$\underset{\sim}{R}(u,w)\geqslant\bigvee_{v\in U}[\underset{\sim}{R}(u,v)\wedge\underset{\sim}{R}(v,w)]$$

永远成立。

定义4 给定 $\underset{\sim}{R}\in\mathscr{F}(U\times V)$ 以及 $\underset{\sim}{S}\in\mathscr{F}(V\times U)$，我们把 $\underset{\sim}{S}$ 叫做 $\underset{\sim}{R}$ 的**转置关系**，记作 $\underset{\sim}{S}=\underset{\sim}{R}^{T}$，意思是指，对任何 $u\in U$，$v\in V$，等式 $\underset{\sim}{R}(u,v)=\underset{\sim}{S}(v,u)$ 永远成立。

明显地，$\underset{\sim}{R}\in\mathscr{F}(U\times U)$ 具有 Fuzzy 对称性的充分必要条件是 $\underset{\sim}{R}^{T}=\underset{\sim}{R}$。

例3 设 Fuzzy 关系 $\underset{\sim}{R}\in\mathscr{F}(U\times U)$ 具有对称性及传递性，又 u，v，$w\in U$。那么在隶属度

$$a=\underset{\sim}{R}(u,v),\quad b=\underset{\sim}{R}(v,w),\quad c=\underset{\sim}{R}(w,u)$$

中，必有两者相等而且不超过第三者，换言之，

$$a=b\leqslant c,\quad b=c\leqslant a,\quad c=a\leqslant b$$

至少有一成立。

证 按从小到大的次序排列这三个隶属度。不失一般性，无妨设 $a\leqslant b\leqslant c$。此时可以断言 $a=b$。事实上，利用 $\underset{\sim}{R}$ 的 Fuzzy 传递性及对称性得

$$\begin{aligned}a=\underset{\sim}{R}(u,v)&\geqslant\bigvee_{t\in U}[\underset{\sim}{R}(u,t)\wedge\underset{\sim}{R}(t,v)]\\&\geqslant\underset{\sim}{R}(u,w)\wedge\underset{\sim}{R}(w,v)\\&=c\wedge b=b.\end{aligned}$$

所以 $a\geqslant b$。于是 $a=b\leqslant c$。这正是所需要的。

§3.2 Fuzzy关系的合成

通过一个显浅的例子说明 Fuzzy 关系的合成。

设论域U是由男性个体构成的人群。$R\in\mathscr{P}(U\times U)$表示人群中的弟兄关系，即$uRv$意味着$u$是$v$的弟弟；$S\in\mathscr{P}(U\times U)$表示父子关系；$Q\in\mathscr{P}(U\times U)$表示叔侄关系。则$R$, S, Q之间有这样的联系：

$$uQw\Longleftrightarrow\exists\ v\in U\text{ 使 }uRv\text{ 且 }vSw$$

换言之，所谓u是w的叔叔，意思是指，存在着v，使v既是u的哥哥，也是w的父亲。我们称叔侄关系Q是弟兄关系R与父子关系S的合成，记作$Q=R\circ S$。

一般地，给定普通关系$R\in\mathscr{P}(U\times V)$以及$S\in\mathscr{P}(V\times W)$。可以导出关系$Q\in\mathscr{P}(U\times W)$如下：

对任意$(u,w)\in U\times W$,

$$uQw\Longleftrightarrow\exists\ v\in V\text{ 使 }uRv\text{ 且 }vSw;$$

即

$$(u,w)\in Q\Longleftrightarrow\exists\ v\in V\text{ 使 }(u,v)\in R\text{ 且 }(v,w)\in S.$$

利用特征函数写成

$$Q(u,w)=1\Longleftrightarrow\exists\ v\in V\text{ 使 }R(u,v)\wedge S(v,w)=1.$$

由此推出

$$Q(u,w)=\bigvee_{v\in V}[R(u,v)\wedge S(v,w)].$$

Q叫做R与S的合成，记作$Q=R\circ S$。

普通关系的合成概念自然地推广为

定义1 给定Fuzzy关系$\underset{\sim}{R}\in\mathscr{F}(U\times V)$以及$\underset{\sim}{S}\in\mathscr{F}(V\times$

W). 它们的合成记作$R \circ S \in \mathscr{F}(U \times W)$. 其隶属函数规定为

$$(R \circ S)(u,w) = \bigvee_{v \in V} [R(u,v) \wedge S(v,w)].$$

定理1 设 $R \in \mathscr{F}(U \times V)$, $S, Q \in \mathscr{F}(V \times W)$. $P \in \mathscr{F}(W \times Z)$. 那么 Fuzzy 关系的合成具有下列性质:

(1)结合律 $(R \circ S) \circ P = R \circ (S \circ P)$;

(2)对并的左、右分配律

$$R \circ (S \cup Q) = (R \circ S) \cup (R \circ Q),$$
$$(S \cup Q) \circ P = (S \circ P) \cup (Q \circ P);$$

(3) 对交的左、右次分配律

$$R \circ (S \cap Q) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ Q),$$

$$(S \cap Q) \circ P \subseteq (S \circ P) \cap (Q \circ P);$$

(4) 单调律

$$S \subseteq Q \Longrightarrow R \circ S \subseteq R \circ Q \text{ 且 } S \circ P \subseteq Q \circ P;$$

(5)转置律 $(R \circ S)^{T} = S^{T} \circ R^{T}$.

证(1) $((R \circ S) \circ P)(u,z)$

$$= \bigvee_{w \in W} [(R \circ S)(u,w) \wedge P(w,z)]$$

$$= \bigvee_{w \in W} [(\bigvee_{v \in V} (R(u,v) \wedge S(v,w)) \wedge P(w,z)]$$

$$= \bigvee_{w \in W} \bigvee_{v \in V} [R(u,v) \wedge S(v,w) \wedge P(w,z)]$$

$$= \bigvee_{v \in V} \bigvee_{w \in W} [R(u,v) \wedge S(a,w) \wedge P(w,z)]$$

$$=\bigvee_{v\in V}[R(u,v)\wedge(\bigvee_{w\in W}(S(v,w)\wedge P(w,z))]$$

$$=\bigvee_{v\in V}[R(u,v)\wedge(S\circ P)(v,z)]$$

$$=(R\circ(S\circ P))(u,z)\ .$$

所以

$$(R\circ S)\circ P=R\circ(S\circ P)\ .$$

同理推出其它式子。 □

在合成对交的次分配律中，等号未必成立。请看下例。

例1 已知论域U为开区间$(0,\ 1)$。设 Fuzzy 关系 R，S，$Q\in\mathscr{F}(U\times U)$ 的隶属函数为

$$R(u,v)=1\ ,$$

$$S(u,v)=\begin{cases}1 & \text{当 } u=v\\ u-v & \text{当 } u>v\\ 0 & \text{当 } u<v\end{cases}$$

$$Q(u,v)=\begin{cases}0 & \text{当 } u\geqslant v\\ v-u & \text{当 } u<v\end{cases}\ .$$

我们算出

$$(S\cap Q)(u,v)=S(u,v)\wedge Q(u,v)=0\ .$$

于是

$$(R\circ(S\cap Q))(u,v)$$

$$=\bigvee_{t\in(0,1)}[R(u,t)\wedge(S\cap Q)(t,v)]=0\ .$$

所以$R\circ(S\cap Q)$为空关系$\phi\in\mathscr{F}(U\times U)$。

然而，

$$(\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{S})(u,v)=\bigvee_{t\in(0,1)}[\underset{\sim}{R}(u,t)\wedge\underset{\sim}{S}(t,v)]$$
$$=\bigvee_{t\in(0,1)}\underset{\sim}{S}(t,v)=1\ ,$$

$$(\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{Q})(u,v)=\bigvee_{t\in(0,1)}[\underset{\sim}{R}(u,t)\wedge\underset{\sim}{Q}(t,v)]$$
$$=\bigvee_{t\in(0,1)}\underset{\sim}{Q}(t,v)=v\ ;$$

于是

$$((\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{S})\cap(\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{Q}))(u,v)$$
$$=(\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{S})(u,v)\wedge(\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{Q})(u,v)$$
$$=v\ .$$

由此可见，

$$\underset{\sim}{R}\circ(\underset{\sim}{S}\cap\underset{\sim}{Q})\subsetneqq(\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{S})\cap(\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{Q})\ ,$$

次分配律中的等号的确不成立。

合成对并的左、右分配律推广到任意并以及合成对交的左、右次分配律推广到任意交时仍然有效。

定理2 给定 Fuzzy 关系 $\underset{\sim}{R}\in\mathscr{F}(U\times V)$，$\underset{\sim}{S}^{(t)}\in\mathscr{F}(V\times W)$，$t\in T$ 以及 $\underset{\sim}{P}\in\mathscr{F}(W\times Z)$。则

$$\underset{\sim}{R}\circ(\bigcup_{t\in T}\underset{\sim}{S}^{(t)})=\bigcup_{t\in T}(\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{S}^{(t)}),$$

$$(\bigcup_{t\in T}\underset{\sim}{S}^{(t)})\circ\underset{\sim}{P}=\bigcup_{t\in T}(\underset{\sim}{S}^{(t)}\circ\underset{\sim}{P})\ ;$$

$$\underset{\sim}{R}\circ(\bigcap_{t\in T}\underset{\sim}{S}^{(t)})\subseteq\bigcap_{t\in T}(\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{S}^{(t)})\ ,$$

$$(\bigcap_{t\in T}\underset{\sim}{S}^{(t)})\circ\underset{\sim}{P}\subseteq\bigcap_{t\in T}(\underset{\sim}{S}^{(t)}\circ\underset{\sim}{P})\ .$$

证 $(\underset{\sim}{R}\circ(\bigcup_{t\in T}\underset{\sim}{S}^{(t)}))(u,w)$

$$=\bigvee_{v\in V}[\underset{\sim}{R}(u,v)\wedge(\bigcup_{t\in T}\underset{\sim}{S}^{(t)})(v,w)]$$

$$=\bigvee_{v\in V}[\underset{\sim}{R}(u,v)\wedge(\bigvee_{t\in T}\underset{\sim}{S}^{(t)}(v,w))]$$

$$=\bigvee_{v\in V}\bigvee_{t\in T}[\underset{\sim}{R}(u,v)\wedge\underset{\sim}{S}^{(t)}(v,w)]$$

$$=\bigvee_{t\in T}\bigvee_{v\in V}[\underset{\sim}{R}(u,v)\wedge\underset{\sim}{S}^{(t)}(v,w)]$$

$$=\bigvee_{t\in T}(\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{S}^{(t)})(u,w)$$

$$=(\bigcup_{t\in T}(\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{S}^{(t)}))(u,w)\ .$$

因此，

$$\underset{\sim}{R}\circ(\bigcup_{t\in T}\underset{\sim}{S}^{(t)})=\bigcup_{t\in T}(\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{S}^{(t)})$$

同理证明其余各式。 □

定理3 设$\underset{\sim}{R}\in\mathscr{F}(U\times U)$。则$\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{R}^{\mathrm{T}}$具有对称性及弱自反性。

证 任取u，$v\in U$。我们有

$$(\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{R}^{\mathrm{T}})(u,v)=(\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{R}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(v,u)$$

$$=(\underset{\sim}{R}^{\mathrm{TT}}\circ\underset{\sim}{R}^{\mathrm{T}})(v,u)=(\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{R}^{\mathrm{T}})(v,u)\ .$$

可见$\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{R}^{\mathrm{T}}$是Fuzzy对称关系。此外

$$(\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{R}^{\mathrm{T}})(u,u)=\bigvee_{w\in U}[\underset{\sim}{R}(u,w)\wedge\underset{\sim}{R}(w,u)]$$

$$=\bigvee_{w\in U}[\underset{\sim}{R}(u,w)\wedge\underset{\sim}{R}(u,w)]$$

$$=\bigvee_{w\in U}R(u,w)\geqslant\bigvee_{w\in U}[R(u,w)\wedge R^{T}(w,v)]=(R\circ R^{T})(u,v)$$

所以$R\circ R^{T}$是弱自反关系。 □

定理4 说R，S都是论域U上的自反关系。那么$R\circ S$也是U上的自反关系，并且$R\cup S\subseteq R\circ S$。

证 任取$u,v\in U$．

$$(R\circ S)(u,v)=\bigvee_{t\in U}[R(u,t)\wedge S(t,v)]$$

$$\geqslant R(u,v)\wedge S(v,v)=R(u,v)$$

所以$R\subseteq R\circ S$。同理有$S\subseteq R\circ S$。因此

$$R\cup S\subseteq R\circ S\ .$$

在上述等式中，特别令$v=u$便得$(R\circ S)(u,u)=R(u,u)=1$。可见$(R\circ S)(u,u)=1$即$R\circ S$是U上的自反关系。 □

定理5 设$R\in\mathscr{F}(U\times U)$。引进$R$的正整数次乘方如下

$$R^{1}=R,\quad R^{2}=R\circ R,\quad R^{3}=R\circ R\circ R,\cdots$$

则下列三个条件彼此等价

(i) R具有传递性；

(ii) $R\supseteq R^{2}$；

(iii) $R\supseteq R^{2}\supseteq R^{3}\supseteq\cdots$.

证 留给读者。 □

定义2 给定$R\in\mathscr{F}(U\times U)$。适合下列三条件的 Fuzzy

关系$\widehat{R} \in \mathscr{F}(U \times U)$叫做包含$R$的最小传递关系。也叫做$R$的**传递闭包**。条件是

(i) $\widehat{R}$包含R；

(ii) $\widehat{R}$具有传递性；

(iii) 在U上既包含R又具有传递性的任何Fuzzy关系S必包含$\widehat{R}$。

从定义2看出，每个Fuzzy关系$R \in \mathscr{F}(U \times U)$的传递闭包$\widehat{R}$必唯一。有待说明的是$\widehat{R}$的存在性。

定理6 每个$R \in \mathscr{F}(U \times U)$的传递闭包$\widehat{R}$是存在、唯一的；且

$$\widehat{R} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} R^k.$$

证 着手检查$\bigcup_{k=1}^{+\infty} R^k$是否适合传递闭包的条件。

(i) 明显地$R \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} R^k$.

(ii) 根据合成对任意并的左、右分配律，我们有

$$\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} R^k\right) \circ \left(\bigcup_{l=1}^{+\infty} R^l\right) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{l=1}^{+\infty} R^k \circ R^l$$

$$= \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{l=1}^{+\infty} R^{k+l} \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} R^k.$$

这说明$\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} R^k$具有传递性。

(iii) 在U上任取包含R的传递关系S。利用合成的单调律，由$R \subseteq S$得$R \circ R \subseteq R \circ S \subseteq S \circ S$因而$R^2 \subseteq S$。类似地得$R^3 \subseteq S$，…. 因而$\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} R^k \subseteq S$。

以上三点证明了$\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} R^k$是$R$的一个传递闭包. 另外$R$的传递闭包明显地是唯一的，因而$\widehat{R} = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} R^k$ □

推论1 对Fuzzy自反关系$R \in \mathscr{F}(U \times U)$来说，$R^k$单调上升收敛于$\widehat{R}$.

证 由定理4得知，$R \cup R \subseteq R \circ R$，也就是$R \subseteq R^2$. 利用合成的单调律逐步推出$R^2 \subseteq R^3$，…于是$R \subseteq R^2 \subseteq R^3 \subseteq \cdots \subseteq \widehat{R}$. 另外，还有，

$$\widehat{R}(u,v) = \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} R^k\right)(u,v) = \bigvee_{k=1}^{+\infty} R^k(u,v)$$

$$= \lim_{k \to +\infty} R^k(u,v).$$

概括起来说，R^k单调上升收敛于$\widehat{R}$. □

例2 设R是U上的Fuzzy预序关系，也就是设$R \in \mathscr{F}(U \times U)$具有Fuzzy自反性及传递性. 此时，一方面由定

理6推论1知$\underset{\sim}{R}\subseteq R^2\subseteq R^3\subseteq\cdots$另一方面由Fuzzy传递性$R\supseteq R^2\supseteq R^3\supseteq\cdots$.于是$\widehat{\underset{\sim}{R}}\bigcup_{k=1}^{+\infty}R^k=R$. 由此可见，对任何Fuzzy预序关系$R$均有$\widehat{\underset{\sim}{R}}=R$。

定义3 在论域上具有自反性以及对称性的Fuzzy关系叫做Fuzzy相似关系。在论域上具有自反性、对称性以及传递性的Fuzzy关系叫做Fuzzy等价关系。

引理1 给定Fuzzy关系$\underset{\sim}{R}\in\mathscr{F}(U\times U)$。

(i) $\underset{\sim}{R}$具有Fuzzy自反性的充分必要条件是每个截集R_α具有普通自反性；

(ii) R具有Fuzzy对称性的充分必要条件是每个截集R_α具有普通对称性；

(iii) $\underset{\sim}{R}$具有Fuzzy传递性的充分必要条件是每个截集R_α具有普通传递性。

证(i) 任取$u\in U$以及$\alpha\in[0,1]$.

R具有自反性

$\Longleftrightarrow \underset{\sim}{R}(u,u)=1$

$\Longleftrightarrow (u,u)\in R_1$

$\Longleftrightarrow (u,u)\in R_\alpha$

$\Longleftrightarrow R_\alpha$具有普通自反性.

(ii) 证明留给读者.

(iii) 设R具有Fuzzy传递性。任取$(u,v),(v,w)\in \underset{\sim}{R_\alpha}$.

于是$R(u,v)$，$R(v,w)\geq\alpha$。从而

$$R(u,w)\geq R^2(u,w)=\bigvee_{v\in U}[R(u,t)\wedge R(t,w)]$$

$$\geq R(u,v)\wedge R(v,w)\geq\alpha.$$

可见$(u,w)\in R_\alpha$。即R_α具有普通传递性。

反过来设每个R_α具有普通传递性。任取$u,v,w\in U$。令$\alpha=R(u,v)\wedge R(v,w)$。于是$(u,v)$，$(v,w)\in R_\alpha$。从而$(u,w)\in R_\alpha$。亦即

$$R(u,w)\geq R(u,v)\wedge R(v,w).$$

用利用$v\in U$的任意性，得

$$R(u,w)\geq\bigvee_{v\in U}[R(u,v)\wedge R(v,w)]$$

由此可见，R具有Fuzzy传递性。 □

定理7 $R\in\mathscr{F}(U\times U)$具有Fuzzy等价性的充分必要条件是每个截集$R_\alpha\in\mathscr{P}(U\times U)$具有普通等价性。

证 这是引理1的直接推论。 □

定理8 设$R\in\mathscr{F}(U\times U)$是$U$上的Fuzzy相似关系。那么它的传递闭包$\widehat{R}$具有Fuzzy等价性。

证 前面已证明$\widehat{R}=\bigcup_{k=1}^{\infty}R^k$.

由此直接得$\widehat{R}(u,u)\geq R(u,u)=1$，可见$\widehat{R}$具有Fuzzy自反性。

其次，我们有

$$\begin{aligned}(R^k)^{\mathrm{T}} &= (R \circ R \circ \cdots \circ R)^{\mathrm{T}} \\ &= R^{\mathrm{T}} \circ R^{\mathrm{T}} \circ \cdots \circ R^{\mathrm{T}} \\ &= R \circ R \circ \cdots \circ R \\ &= R^k.\end{aligned}$$

于是

$$(\widehat{R})^{\mathrm{T}} = \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} R^k\right)^{\mathrm{T}} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (R^k)^{\mathrm{T}} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} R^k = \widehat{R}.$$

可见$\widehat{R}$具有Fuzzy对称性。

最后，由定理6知$\widehat{R}$具有Fuzzy传递性。 □

今后将看到Fuzzy等价关系在聚类分析中的重要作用。

§3.3 Fuzzy 矩阵

前面两节对任意论域讨论Fuzzy关系，如果局限于有限论域，那么把Fuzzy关系表达为Fuzzy矩阵将带来很多方便，本节谈谈这方面的问题。

给定从有限论域$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$到有限论域$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$的Fuzzy关系R。这时很自然地想到把隶属度$R(u_i,v_j)$排成表格，并令R等同于矩阵。

$$\begin{pmatrix} \underset{\sim}{R}(u_1,v_1) & \underset{\sim}{R}(u_1,v_2)\cdots\underset{\sim}{R}(u_1,v_n) \\ \underset{\sim}{R}(u_2,v_1) & \underset{\sim}{R}(u_2,v_2)\cdots\underset{\sim}{R}(u_2,v_n) \\ \cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \underset{\sim}{R}(u_m,v_1) & \underset{\sim}{R}(u_m,v_2)\cdots\underset{\sim}{R}(u_m,v_n) \end{pmatrix}.$$

今后把这种表格叫做Fuzzy矩阵。$m\times n$ Fuzzy矩阵的全体记作$\boldsymbol{M}_{m\times n}$。

$$\boldsymbol{M}_{m\times n}=\{\underset{\sim}{R}\mid \underset{\sim}{R}=\left(r_{ij}\right),\ r_{ij}\in[0,1]\}.$$

其中两个特别的矩阵

$$\underset{\sim}{O}=\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix},\qquad \underset{\sim}{E}=\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

分别叫做0矩阵与全矩阵。

Fuzzy 矩阵既然是有限论域的 Fuzzy 关系的一种表达形式，因此Fuzzy矩阵的运算、截矩阵等等都可以沿用Fuzzy集的有关规则。

例1 给定$\underset{\sim}{R}$，$\underset{\sim}{R}^{(t)}\in\boldsymbol{M}_{n\times n}$，$t\in T$．计算$\underset{\sim}{R}^{(c)}$，$\underset{\sim}{R}^{(2)}$，$\bigcup_{t\in T}\underset{\sim}{R}^{(t)}$。

把$\underset{\sim}{R}$，$\underset{\sim}{R}^{(t)}$记为

$$\underset{\sim}{R}=\left(r_{ij}\right),\qquad \underset{\sim}{R}^{(t)}=\left(r_{ij}^{(t)}\right);$$

于是

$$\underset{\sim}{R}^{c}=\left(1-\underset{\sim}{R}(u_i,u_j)\right)=\left(1-r_{ij}\right),$$

$$R^2 = R \circ R = \left((R \circ R)(u_i, u_j)\right)$$

$$= \left(\bigvee_{k=1}^{n} (R(u_i, u_k) \wedge R(u_k, u_j)) \right)$$

$$= \left(\bigvee_{k=1}^{n} (r_{ik} \wedge r_{kj}) \right),$$

$$\bigcup_{t\in T} R^{(t)} = \left((\bigcup_{t\in T} R^{(t)})(u_i, u_j) \right)$$

$$= \left(\bigvee_{t\in T} R^{(t)}(u_i, u_j) \right) = \left(\bigvee_{t\in T} r_{ij}^{(t)} \right).$$

请注意R^2的隶属度算法在外形上同矩阵的普通乘法的类比：用取小∧代替乘积然后用取大∨代替和数。

还值得指出：当 $m=1$ 时，$M_{1\times n}=\mathscr{F}(V)$，换言之，从单元素论域$U$到$n$元素论域$V$的 Fuzzy 关系与$V$上的 Fuzzy 集可以同等看待。

给定 Fuzzy 矩阵$R=(r_{ij})$以及$\alpha\in[0,1]$，令

$$r_{ij\}\alpha} = \begin{cases} 1 & 当 r_{ij}\geqslant\alpha \\ 0 & 当 r_{ij}<\alpha \end{cases}$$

明显地，R的α—截矩阵$R_\alpha=\left(r_{ij\}\alpha}\right)$。

定理1 设$R=(r_{ij})\in M_{l\times m}$，$S=(s_{jk})\in M_{m\times n}$，又$\alpha\in[0,1]$。则

$$(R \circ S)_\alpha = R_\alpha \circ S_\alpha.$$

证 $(R \circ S)_\alpha$ 以及 $R_\alpha \circ S_\alpha$ 都是 $l \times n$ 布尔矩阵。我们证明前者的元素 $((R \circ S)_\alpha)_{ik}$ 与后者的元素 $(R_\alpha \circ S_\alpha)_{ik}$ 相等好了。

先看 $((R \circ S)_\alpha)_{ik}=1$ 的情形，此时 $(R \circ S)_{ik} \geqslant \alpha$，即

$$\alpha \leqslant (R \circ S)_{ik} = \bigvee_{j=1}^{m}(r_{ij} \wedge s_{jk}).$$

故存在 j_0 使 $r_{ij_0} \wedge s_{j_0k} \geqslant \alpha$，从而 $r_{ij_0} \geqslant \alpha$ 且 $s_{j_0k} \geqslant \alpha$，即 $r_{ij_0;\alpha}=1$ 且 $s_{j_0k;\alpha}=1$。由此

$$(R_\alpha \circ S_\alpha)_{ik} = \bigvee_{j=1}^{m}((R_\alpha)_{ij} \wedge (S_\alpha)_{jk})$$

$$= \bigvee_{j=1}^{m}(r_{ij;\alpha} \wedge s_{jk;\alpha}) \geqslant r_{ij_0;\alpha} \wedge s_{j_0k;\alpha}$$

所以 $(R_\alpha \circ S_\alpha)_{ik}=1$。

再看 $((R \circ S)_\alpha)_{ik}=0$ 的情形，此时 $(R \circ S)_{ik} < \alpha$。即

$$\alpha > (R \circ S)_{ik} = \bigvee_{j=1}^{m}(r_{ij} \wedge s_{jk}).$$

故 $\forall j$，$\alpha > r_{ij} \wedge s_{jk}$。因此 $\forall j$，或者 $\alpha > r_{ij}$，或者 $\alpha > s_{jk}$。即 $\forall j$，或者 $r_{ij;\alpha}=0$ 或者 $s_{jk;\alpha}=0$。于是

$0=\bigvee_{j=1}^{m}(r_{ij;\alpha}\wedge s_{jk;\alpha})=(R_\alpha\circ S_\alpha)_{ik}$.

总起来说，在任何情况下，$((R\circ S)_\alpha)_{ik}=(R_\alpha\circ S_\alpha)_{ik}$.所以

$(R\circ S)_\alpha=R_\alpha\circ S_\alpha$. □

从定理1直接得到

推论 给定Fuzzy方阵R以及任一正整数m。设$\alpha\in[0,1]$.则

$$(R^m)_\alpha=(R_\alpha)^m$$

对α—强截阵来说，类似的等式同样成立，

$$(R\circ S)_{\dot\alpha}=R_{\dot\alpha}\circ S_{\dot\alpha}\quad;$$

$$(R^m)_{\dot\alpha}=(R_{\dot\alpha})^m$$

定理2 设$R=(r_{ij})\in M_{n\times n}$.则恒有

$$\hat{R}=\bigcup_{p=1}^{n}R^p\quad.$$

证 引入记号

$$R^k=\left(r_{ij}^{(k)}\right),\quad k=1,2,\cdots.$$

我们有

$$r_{ij}^{(2)}=\bigvee_{j_1=1}^{n}(r_{ij_1}\wedge r_{j_1j}),$$

$$r_{ij}^{(3)}=\bigvee_{j_1=1}^{n}(r_{ij_1}\wedge r_{j_1j}^{(2)})=$$

$$= \bigvee_{j_1=1}^{n} (r_{ij_1} \wedge (\bigvee_{j_2=1}^{n} (r_{j_1j_2} \wedge r_{j_2j})))$$

$$= \bigvee_{j_1, j_2=1}^{n} (r_{ij_1} \wedge r_{j_1j_2} \wedge r_{j_2j}) ,$$

………

$$r_{ij}^{(k)} = \bigvee_{j_1, \cdots, j_{k-1}=1}^{n} (r_{ij_1} \wedge r_{j_1j_2} \wedge \cdots \wedge r_{j_{k-1}j}) .$$

当乘方次数 $k>n$ 时，上式右边每一项的足码除带有 i，j 之外，还带有 j_1，j_2，$\cdots j_{k-1}$。所以 j_1，j_2，$\cdots$，j_{k-1}，j 必有相同的。比方说 $j_2=j_4$。于是

$$r_{ij_1} \wedge r_{j_1j_2} \wedge r_{j_2j_3} \wedge r_{j_3j_4} \wedge r_{j_4j_5} \wedge \cdots \wedge r_{j_{k-1}j}$$

$$\leqslant r_{ij_1} \wedge r_{j_1j_2} \wedge r_{j_2j_5} \wedge \cdots \wedge r_{j_{k-1}j} .$$

故必存在 $p \leqslant n$ 使得

$$r_{ij_1} \wedge r_{j_1j_2} \wedge \cdots \wedge r_{j_{k-1}j} \leqslant r_{i\alpha_1} \wedge r_{\alpha_1\alpha_2} \wedge \cdots \wedge r_{\alpha_{p-1}j}$$

$$\leqslant \bigvee_{\alpha_1, \cdots, \alpha_{p-1}=1}^{n} (r_{i\alpha_1} \wedge r_{\alpha_1\alpha_2} \wedge \cdots \wedge r_{\alpha_{p-1}j}) = r_{ij}^{(p)}$$

因而 $r_{ij}^{(k)} \leqslant \bigvee_{p=1}^{n} r_{ij}^{(p)}$，也就是 $R^k \subseteq \bigcup_{p=1}^{n} R^p$。由此可知

$$\hat{R} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} R^k = \left(\bigcup_{k=1}^{n} R^k \right) \cup \left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} R^k \right) = \bigcup_{k=1}^{n} R^k . \qquad \square$$

对自反方阵来说，结果更好。见

定理3 设 $R=(r_{ij}) \in \boldsymbol{M}_{n\times n}$ 具有自反性，那么

$$\underset{\sim}{\hat{R}} = \underset{\sim}{R}^{n-1} .$$

证 根据§3.2定理6推论1，对任何Fuzzy自反关系$\underset{\sim}{R}$来说，$\underset{\sim}{R}^k$单调上升收敛于$\underset{\sim}{\hat{R}}$。考虑到n阶Fuzzy自反方阵的情况，这便成为

$$\underset{\sim}{R} \subseteq \underset{\sim}{R}^2 \subseteq \cdots \subseteq \underset{\sim}{R}^{n-1} \subseteq \underset{\sim}{R}^n = \underset{\sim}{\hat{R}} .$$

仍令

$$\underset{\sim}{R}^{n-1} = \left(r_{ij}^{(n-1)} \right), \quad \underset{\sim}{R}^n = \left(r_{ij}^{(n)} \right) .$$

我们来比较$r_{ij}^{(n-1)}$，$r_{ij}^{(n)}$的大小。

当$i=j$时，由于$\underset{\sim}{R}^{(n-1)}$，$\underset{\sim}{R}^{(n)}$都具有Fuzzy自反性，故

$$r_{ii}^{(n-1)} = 1 = r_{ii}^{(n)} .$$

当$i \neq j$时，

$$r_{ij}^{(n)} = \bigvee_{j_1, \cdots, j_{n-1}=1}^{n} (r_{ij_1} \wedge r_{j_1 j_2} \wedge \cdots \wedge r_{j_{n-1} j})$$

i，j已占去n个不同足码中的两个，只剩下$n-2$个不同的足码，因此i，j_1，$\cdots$，j_{n-1}，j必有相同的。于是

$$r_{ij}^{(n)} = \bigvee_{j_1, \cdots, j_{n-1}=1}^{n} (r_{ij_1} \wedge r_{j_1 j_2} \wedge \cdots \wedge r_{j_{n-1} j}) \leqslant r_{ij}^{(n-1)}$$

可见在任何情况下都有$r_{ij}^{(n)} \leqslant r_{ij}^{(n-1)}$。故$\underset{\sim}{R}^{n-1} = \underset{\sim}{R}^n$。这样一来，

$$\hat{R} = \bigcup_{k=1}^{n} R^k = R^{n-1} \ . \qquad \square$$

透过定理 3 的证明，我们对 n 阶 Fuzzy 自反方阵 R 得出

$$\hat{R} = R^{n-1} = R^n = R^{n+1} = \cdots \ .$$

根据自反方阵这个特点，可以用逐次平方的办法来计算自反方阵的传递闭包。比方说，给定 26 阶 Fuzzy 自反方阵。那么

$$R \to R^2 \to R^4 \to R^8 \to R^{16} \to R^{32}$$

平方 5 次便找到 $R^{32} = R^{25} = \hat{R}$.

定理4 设 $R \in M_{n\times n}$ 具有Fuzzy 自反性。又 $\alpha \in [0,1]$，那么

$$(\hat{R})_\alpha = \hat{R_\alpha} \ .$$

证 这是定理3以及定理1的直接推论。事实上，$(\hat{R})_\alpha$

$$= (R^{n-1})_\alpha = (R_\alpha)^{n-1} = \hat{R_\alpha} \ . \qquad \square$$

这个定理说明，Fuzzy自反方阵作传递闭包与作α—截阵可以调换先后次序。

§3.4 Fuzzy图

Fuzzy图是模糊数学的重要组成部分，有广泛的应用。

在普通图论中，图是无向图的简称，它由集合对V，E

共同构成，记作$G=(V,E)$。其中

（1）$V=\{v_1,v_2,\cdots v_p\}$是非空有限集，叫做图G的**顶点集**；V的元素叫做图G的**顶点**。

（2）$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_q\}$是非空有限集，叫做图G的**边线集**；E的元素$e_i=\{v_j,v_k\}$叫做图G的**边线**；顶点v_j，v_k叫做边线e_i的**端点**.同一边线的两端点是否相同，不加限制。

图$G=(V,E)$的直观形象见图1。

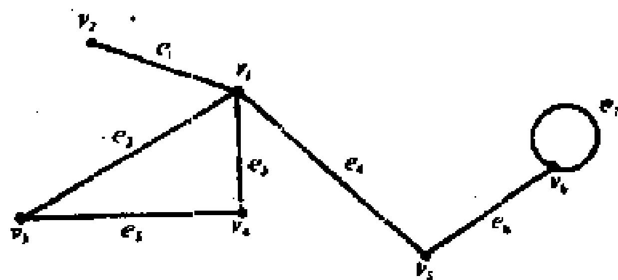


图1

设$G=(V,E)$，$G'=(V',E')$都是图.所谓G'是G的子图，记作$G'\subseteq G'$，意思是指$V'\subseteq V$且$E'\subseteq E$。

可以联成一串的边线$\{v_{i_0},v_{i_1}\}$，$\{v_{i_1},v_{i_2}\}$，…，$\{v_{i_{n-1}},v_{i_n}\}$叫做图的一条通道，记作$L(v_{i_0},v_{i_1},\cdots,v_{i_n})$；$v_{i_0}$，$v_{i_n}$叫做这条通道的端点；$n$叫做这条通道的长度。

如果对图的任何两个不相同的顶点都存在着以这两个顶点为端点的通道，则称此图为**连通图**，否则称为不连通图或**分离图**。

图的通道分成几种.通道$L(v_{i_0},v_{i_1},\cdots,v_{i_n})$叫做**迹**，意思是指$L$中的所有边线都不相同。通道$L(v_{i_0},v_{i_1},\cdots,v_{i_n})$

叫做**路**，意思是指L中的所有顶点都不相同。很明显，L中没有相同的顶点则必然没有相同的边线。通道$L(v_{i_0},v_{i_1},\cdots,v_{i_n})$叫做**圈**，意思是指，除$v_{i_0}=v_{i_n}$之外，$L$中其余顶点都不相同。

无圈的连通图称为**树**；在有圈的连通图中去掉某些边线之后而得到的树，叫做该图的**生成树**。

定义1 给定图$G=(V,E)$。我们说一对Fuzzy集$\underset{\sim}{V}\in\mathscr{F}(V)$及$\underset{\sim}{E}\in\mathscr{F}(E)$共同构成一个Fuzzy图$\underset{\sim}{G}=(\underset{\sim}{V},\underset{\sim}{E})$，意思是指，这两个Fuzzy集的隶属函数只取正值而且对任何边线$e=\{x,y\}$，永远满足不等式

$$\underset{\sim}{E}(e)\leqslant\underset{\sim}{V}(x)\wedge\underset{\sim}{V}(y)\ .$$

G叫做$\underset{\sim}{G}$的**基础图**，$\underset{\sim}{G}$叫做G上的Fuzzy图。

为方便计，允许把隶属函数的值$\underset{\sim}{E}(e)$写为$\underset{\sim}{E}(x,y)$或$\underset{\sim}{E}(y,x)$。

例1 给定$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_5\}$，$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_7\}$；其中
$e_1=\{v_1,v_2\}$，$e_2=\{v_1,v_4\}$，$e_3=\{v_2,v_3\}$，
$e_4=\{v_2,v_4\}$，$e_5=\{v_3,v_3\}$；$e_6=\{v_3,v_4\}$，
$e_7=\{v_4,v_5\}$.

则$G=(V,E)$是一个普通图。设$\underset{\sim}{V}\in\mathscr{F}(V)$，$\underset{\sim}{E}\in\mathscr{F}(E)$的隶属度为

$\underset{\sim}{V}(v_1)=0.8$，$\underset{\sim}{V}(v_2)=0.7$，$\underset{\sim}{V}(v_3)=0.6$

$\underset{\sim}{V}(v_4)=1$，$\underset{\sim}{V}(v_5)=0.9$；

$\underset{\sim}{E}(e_1)=0.6$, $\underset{\sim}{E}(e_2)=0.8$, $\underset{\sim}{E}(e_3)=0.5$,

$\underset{\sim}{E}(e_4)=0.3$, $\underset{\sim}{E}(e_5)=0.5$, $\underset{\sim}{E}(e_6)=0.4$,

$\underset{\sim}{E}(e_7)=0.8$.

容易验证 $\underset{\sim}{G}=(\underset{\sim}{V},\underset{\sim}{E})$ 是 G 上的一个 Fuzzy 图，直观形象见图2.

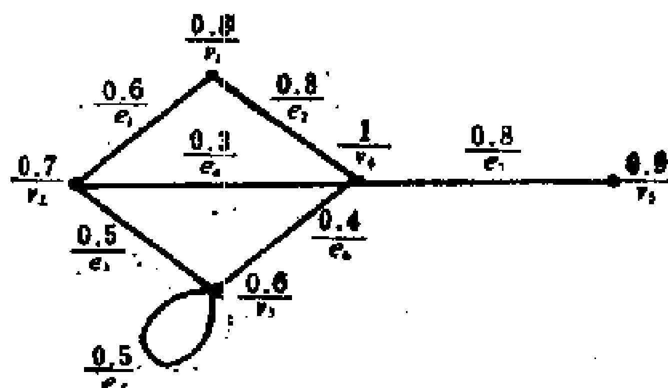


图 2

例2 给定有限论域X上的一个非空Fuzzy对称关系 $\underset{\sim}{R}$.

令顶点集$V=X$，边线集

$$E=\{e\mid e=\{x,y\}\in\mathscr{P}(X),\underset{\sim}{R}(x,y)>0\}.$$

又取Fuzzy集 $\underset{\sim}{V}\in\mathscr{F}(V)$ 及$\underset{\sim}{E}\in\mathscr{F}(E)$,

$$\underset{\sim}{V}(v)=1,\qquad \forall v\in V;$$

$$\underset{\sim}{E}(e)=\underset{\sim}{R}(x,y)\qquad \forall e=\{x,y\}\in E.$$

则$G=(V,E)$是基础图，$\underset{\sim}{G}=(\underset{\sim}{V},\underset{\sim}{E})$是$G$上的Fuzzy图.

反过来，任给基础图$G=(V,E)$上的Fuzzy图$\underset{\sim}{G}=(\underset{\sim}{V},\underset{\sim}{E})$.

令$\underset{\sim}{R}\in\mathscr{F}(V\times V)$的隶属函数

$$R(x,y)=\begin{cases}E(x,y) & 当\{x,y\}\in E\\ 0 & 当\{x,y\}\notin E.\end{cases}$$

则R是V上的非空Fuzzy对称关系．还有，这个Fuzzy对称关系按前段所述步骤确定的Fuzzy图正好与G吻合．

定理1 给定普通图$G=(V,E)$．设Fuzzy集$V\in\mathscr{F}(V)$及$E\in\mathscr{F}(E)$的隶属函数均处处取正值．则

$G=(V,E)$是Fuzzy图

$\Longleftrightarrow$对任意$\lambda\in[0,\bigvee_{e\in E}E(e)]$，$(V_\lambda,E_\lambda)$是$G$的子图

证 $\Longrightarrow$

因为E是非空有限集，所以存在$e_0=\{x_0,y_0\}\in E$使Fuzzy集E的峰值$\bigvee_{e\in E}E(e)=E(e_0)$．对每个$\lambda\in[0,E(e_0)]$，由

$$\lambda\leqslant E(e_0)\leqslant V(x_0)\wedge V(y_0)$$

知x_0，$y_0\in V_\lambda$且$e_0\in E_\lambda$．故V_λ，E_λ均为非空有限集．不仅如此，对任何$e=\{x,y\}\in E_\lambda$，我们有

$$\lambda\leqslant E(e)\leqslant V(x)\wedge V(y).$$

从而x，$y\in V_\lambda$．这意味着(V_λ,E_λ)是一个普通图而且是(V,E)的子图．

$\Longleftarrow$

已知对任意$\lambda\in[0,\bigvee_{e\in E}E(e)]$，$(V_\lambda,E_\lambda)$是$G$的子图．要

证明 $\underset{\sim}{G}=(\underset{\sim}{V}, \underset{\sim}{E})$ 是 G 上的 Fuzzy 图，等于要证明任何边线 $e=\{x,y\}$ 永远满足不等式

$$\underset{\sim}{E}(e)\leqslant \underset{\sim}{V}(x)\wedge \underset{\sim}{V}(y).$$

使用反证法。假如存在 $e'=\{x',y'\}\in E$ 使

$$\underset{\sim}{E}(e')>\underset{\sim}{V}(x')\wedge \underset{\sim}{V}(y').$$

取 λ_0 介于 $\underset{\sim}{E}(e')$ 与 $\underset{\sim}{V}(x')\wedge \underset{\sim}{V}(y')$ 之间，那么

$$\bigvee_{e\in E}\underset{\sim}{E}(e)\geqslant \underset{\sim}{E}(e')>\lambda_0$$
$$>\underset{\sim}{V}(x')\wedge \underset{\sim}{V}(y')\geqslant 0.$$

但 $(\underset{\sim}{V}_{\lambda_0}, \underset{\sim}{E}_{\lambda_0})$ 是 G 的子图，而 $\underset{\sim}{E}(e')>\lambda_0$，故 $e'\in \underset{\sim}{E}_{\lambda_0}$，从而 e' 的端点 $x',y'\in \underset{\sim}{V}_{\lambda_0}$。因此 $\underset{\sim}{V}(x')\geqslant\lambda_0$ 且 $\underset{\sim}{V}(y')\geqslant\lambda_0$。这样

$$\underset{\sim}{V}(x')\wedge \underset{\sim}{V}(y')\geqslant\lambda_0;$$

前后矛盾。这便证明了 $\underset{\sim}{G}=(\underset{\sim}{V}, \underset{\sim}{E})$ 是 G 上的Fuzzy图。 □

定义2 给定图 $G=(V,E)$ 上的Fuzzy图 $\underset{\sim}{G}=(\underset{\sim}{V}, \underset{\sim}{E})$ 以及实数 $\lambda\in[0, \bigvee_{e\in E}\underset{\sim}{E}(e)]$。普通图 $(\underset{\sim}{V}_\lambda, \underset{\sim}{E}_\lambda)$ 叫做 $\underset{\sim}{G}$ 的一个 λ—截图，记作 $\underset{\sim}{G}_\lambda=(\underset{\sim}{V}_\lambda, \underset{\sim}{E}_\lambda)$。

定义3 给定图 $G=(V,E)$ 上的两个Fuzzy图 $\underset{\sim}{G}=(\underset{\sim}{V}, \underset{\sim}{E})$ 及 $\underset{\sim}{G}'=(\underset{\sim}{V}', \underset{\sim}{E}')$。$\underset{\sim}{G}'$ 叫做 $\underset{\sim}{G}$ 的Fuzzy子图，记作 $\underset{\sim}{G}'\subseteq\underset{\sim}{G}$，意思是指 $\underset{\sim}{V}'\subseteq\underset{\sim}{V}$ 且 $\underset{\sim}{E}'\subseteq\underset{\sim}{E}$。

定义4 Fuzzy图叫做连通的，意思是指它的基础图是连通的。Fuzzy图叫做树，意思是指它的基础图是树。

定义5 给定连通Fuzzy图 G 及其子图$T\subseteq G$。T叫做G 的**生成树**，意思是指 T_0是基础图的一棵生成树。

生成树 T 中的边线的全体记作$E(T)$。

定义6 给定连通Fuzzy图 $G=(V,E)$。G的生成树T^*叫做最大生成树，意思是指，T^*中的所有边线的隶属度之和永不小于其它任何生成树T的所有边线的隶属度之和，即

$$\sum_{e\in E(T)} E(e)\leqslant \sum_{e\in E(T^*)} E(e).$$

例3 给定连通Fuzzy图 $G=(V,E)$，

$$V=\frac{0.9}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{0.6}{v_3}+\frac{1}{v_4},$$

$$E=\frac{0.7}{\{v_1,v_2\}}+\frac{0.1}{\{v_1,v_3\}}+\frac{0.5}{\{v_2,v_3\}}+\frac{0.4}{\{v_2,v_4\}}+\frac{0.6}{\{v_3,v_4\}},$$

见图3(a)。为醒目计，图中除了省略每个顶点的隶属度之外，还仅在边线上写出边线的隶属度。容易得出G的一棵最大生成树T^*，见图3(b)。

$$T^*=\frac{0.7}{\{v_1,v_2\}}+\frac{0.5}{\{v_2,v_3\}}+\frac{0.6}{\{v_3,v_4\}}.$$

具体的作法是从$L(v_1,v_2,v_3,v_1)$中删去边线$\{v_1,v_3\}$，并从$L(v_2,v_3,v_4,v_2)$中删去边线$\{v_2,v_4\}$。

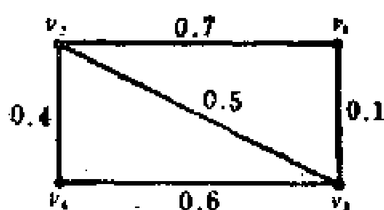


图3(a)

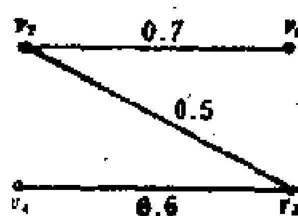


图3(b)

定义7 设 $L(v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_k})$是$\underset{\sim}{G}$的一条路。

(i) 在L的边线中，隶属度的最小值叫做路L的强度，记作$S(L)$，即

$$S(L)=\underset{\sim}{E}(v_{i_1},v_{i_2})\wedge\underset{\sim}{E}(v_{i_2},v_{i_3})\wedge\cdots\wedge\underset{\sim}{E}(v_{i_{k-1}},v_{i_k});$$

(ii) v_{i_1}与v_{i_k}之间的连通强度定义为

$$S(v_{i_1},v_{i_k})=\bigvee_{L\in L_{v_{i_1}v_{i_k}}}S(L)$$

其中$L_{v_{i_1}v_{i_k}}$表示v_{i_1}与v_{i_k}之间的所有路构成的集合。

定理2 设$\underset{\sim}{T}$是连通 Fuzzy 图$\underset{\sim}{G}=(V,\underset{\sim}{E})$的生成树．$\underset{\sim}{T}$能够成为$\underset{\sim}{G}$的最大生成树的充分必要条件是：任何两个不同的顶点$u,v$之间，在$\underset{\sim}{T}$中存在唯一的一条路$L$使$S(u,v)=S(L)$。

附注 这个定理说的是用两个不同顶点之间的连通强度刻划最大生成树的特征。我们可以这样直觉地理解生成树$\underset{\sim}{T}$的最大性。首先，因为$\underset{\sim}{T}$是连通的又没有圈。因此不同的任何两个顶点都能用$\underset{\sim}{T}$中的唯一的一条路连接起来。其次，这条路的强度又非等于这两个顶点之间的连通强度不可。不然

的话，另找一条强度高的路代替这条路，便得出比最大生成树还要大的生成树。这是不可能的。下面基于这种直觉给出抽象的证明。

证 必要性。设 $\underset{\sim}{T}$ 是 $\underset{\sim}{G}$ 的最大生成树，在 $\underset{\sim}{T}$ 中从 u 到 v 的路是存在、唯一的。记之为 L。

$$L: u \overset{e_1}{——} v_1 \overset{e_2}{——} v_2 ——\cdots—— v_{n-1} \overset{e_n}{——} v.$$

因为 $S(L)=\underset{\sim}{E}(e_1)\wedge\cdots\wedge\underset{\sim}{E}(e_n)$，所以必存在 e_i 使 $S(L)=\underset{\sim}{E}(e_i)$。毫无疑问 $S(u,v)\geqslant S(L)$。焦点是等号成立否。

用反证法。假如 $S(u,v)>S(L)$ 的话。那么在 $\underset{\sim}{G}$ 中存在着另一条路 L'

$$L': u \overset{e_1'}{——} v_1' \overset{e_2'}{——} v_2' ——\cdots—— v'_{m-1} \overset{e_m'}{——} v$$

使得 $S(u,v)=S(L')$。

由反证法的假设，$S(L')>S(L)=\underset{\sim}{E}(e_i)$。因此 L' 不能经过 e_i，我们从 T 中删去 e_i 之后，得到彼此不连通的两部分，每一部分都是 Fuzzy 树，记作 $\underset{\sim}{T}-e_i=\underset{\sim}{T}^{(1)}+\underset{\sim}{T}^{(2)}$。无妨令 $u\in V(\underset{\sim}{T}^{(1)})$，$v\in V(\underset{\sim}{T}^{(2)})$。设连结 $\underset{\sim}{G}$ 中一个端点在 $V(\underset{\sim}{T}^{(1)})$ 而另一个端点在 $V(\underset{\sim}{T}^{(2)})$ 的所有边线构成集合 E'。于是在 L' 中必存在 e_j' 使 $e_j'\in E'$ 且 $\underset{\sim}{E}(e_j')\geqslant S(L')>\underset{\sim}{E}(e_i)$。现在构造新的生成树 $\underset{\sim}{T}'$，

$$\underset{\sim}{T}'=(\underset{\sim}{T}-e_i)+e_j'.$$

于是 $\sum_{e\in E(T')} \underset{\sim}{E}(e) > \sum_{e\in E(T)} \underset{\sim}{E}(e)$.这样一来，$T$ 并非最大树.这个矛盾断定等式 $S(u,v)=S(L)$非成立不可。

充分性。考察G的一棵最大生成树T^*。我们着手证明，即使$T\neq T^*$，T同样也是一棵最大生成树。为此，把T^*中不属于T的边线记为 $e_1=\{x_1,y_1\}$，…，$e_k=\{x_k,y_k\}$，$k\geqslant 1$.把刚刚获得的必要性用于T^*,便知$S(x_k,y_k)=\underset{\sim}{E}(e_k)$。另一方面$T$中存在着以$x_k,y_k$为端点的唯一的路$L$适合等式$S(L)=S(x_k,y_k)=\underset{\sim}{E}(e_k)$。重复在证明必要性时用过的步骤，在$L$中选择边线$e_l'$构造新的生成树$T'$,

$$T'=(T^*-e_k)+e_l'.$$

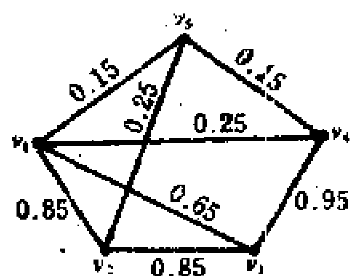
e_l'显然并不是T^*中的边线．因为$\underset{\sim}{E}(e_l')\geqslant S(L)=\underset{\sim}{E}(e_k)$，所以$T'$也是一棵最大生成树．$T'$中不属于$T$的边线已减少为$e_1,\cdots,e_{k-1}$. 对$T'$进行类似的替换，如此等等．经过$k$次替换之后，最后得到的最大树便等于$T$．这正是我们希望的．□

例4 给定连通 Fuzzy 图$G=(\underset{\sim}{V},\ \underset{\sim}{E})$。见图4($a$)．其中

$$\underset{\sim}{V}=\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}+\frac{1}{v_4}+\frac{1}{v_5}.$$

$$\underset{\sim}{E}=\frac{0.85}{\{v_1,v_2\}}+\frac{0.65}{\{v_1,v_3\}}+\frac{0.25}{\{v_1,v_4\}}+\frac{0.15}{\{v_1,v_5\}}+\frac{0.85}{\{v_2,v_3\}}$$
$$+\frac{0.25}{\{v_2,v_5\}}+\frac{0.95}{\{v_3,v_4\}}+\frac{0.15}{\{v_4,v_5\}}$$

求G的一棵最大生成树.



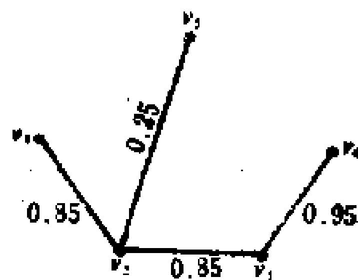


图4(a)　　　　图4(b)

首先随意取一个圈，例如取$L(v_1,v_2,v_5,v_1)$。因

$$E(v_1,v_2)\wedge E(v_2,v_5)\wedge E(v_5,v_1)=0.15$$

即$E(v_1,v_5)=0.15$最小，于是去掉边线$\{v_1,v_5\}$.再考察剩下来的任一个圈，例如$L(v_1,v_2,v_3,v_1)$，去掉边线$\{v_1,v_3\}$。继续考察剩下来的任一个圈，例如$L(v_2,v_3,v_4,v_5,v_2)$，去掉边线$\{v_4,v_5\}$。最后考察$L(v_1,v_2,v_3,v_4,v_1)$，去掉边线$\{v_1,v_4\}$于是得到一棵最大生成树．见图4(b)。

每个连通Fuzzy图的最大生成树往往不只一棵。根据定理2，不论选取哪一棵都不影响任何两个不同顶点之间的连通强度。

§3.5　Fuzzy聚类分析

根据事物的特性并按照预定的标准对事物进行分类的数学方法叫做聚类分析．它原是数理统计多元分析的一支，有广泛的实际应用．由于现实的分类往往伴随着模糊性，因此把模糊数学方法引入聚类分析，可望分类结果更切合实际。本节介绍用Fuzzy等价关系进行聚类分析的基本步骤。

设 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$为被分类对象的全体。根据对象的属性(如物理、化学等属性)用一组数据刻划每一个对象。设刻划对象 u_i 的数据组为

$$u_i=(u_{i1},u_{i2},\cdots u_{im}). \qquad i=1,2,\cdots,n.$$

Fuzzy 聚类分析的第一步叫做标定，即使用普通聚类分析中确定相似系数的方法来建立 Fuzzy 相似方阵

$$R=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots\ r_{nn} \end{pmatrix}.$$

计算 u_i 与 u_j 之间的相似系数 r_{ij} 的方法很多，常见的如下。

1. 数量积法。

$$r_{ij}=\begin{cases} 1 & i=j \\ \dfrac{1}{M}\sum_{k=1}^{m}u_{ik}u_{jk} & i\neq j, \end{cases}$$

其中 $$M>\underset{i\neq j}{\mathrm{Max}}\left|\sum_{k=1}^{m}u_{ik}u_{jk}\right|.$$

显然$|r_{ij}|\in[0,1]$。如果 r_{ij} 中出现负值，可将所有 r_{ij} 调整为

$$r_{ij}'=\frac{r_{ij}+1}{2},$$

或者调整为

$$r_{ij}'=\frac{r_{ij}-\underset{i\neq j}{\mathrm{Min}}r_{ij}}{\underset{i\neq j}{\mathrm{Max}}\,r_{ij}-\underset{i\neq j}{\mathrm{Min}}r_{ij}} \qquad (i\neq j).$$

于是每个 $r_{ij}' \in [0,1]$。

2．夹角余弦法。

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{m} u_{ik}u_{jk}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m} u_{ik}^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{m} u_{jk}^2}}.$$

如果 r_{ij} 中出现负值，可如上述一样进行调整。

3．相关系数法。

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{m}(u_{ik}-\bar{u}_i)(u_{jk}-\bar{u}_j)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(u_{ik}-\bar{u}_i)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(u_{jk}-\bar{u}_j)^2}}$$

其中 $\bar{u}_i=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}u_{ik}$，$\bar{u}_j=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}u_{jk}$。

4．绝对值指数法。

$$r_{ij}=\exp\left(-\sum_{k=1}^{m}|u_{ik}-u_{jk}|\right).$$

5．绝对值减数法。

$$r_{ij}=1-c\sum_{k=1}^{m}|u_{ik}-u_{jk}|,$$

其中 c 为适当选取的常数，使 r_{ij} 在[0,1]中且分散开。

6. 绝对值倒数法。

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ \dfrac{M}{\sum\limits_{k=1}^{m}|u_{ik}-u_{jk}|} & i\neq j\end{cases},$$

其中 M 为适当选取的常数，使 r_{ij} 在[0,1]中且分散开。

7. 最小最大法。

$$r_{ij}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}(u_{ik}\wedge u_{jk})}{\sum\limits_{k=1}^{m}(u_{ik}\vee u_{jk})}.$$

8. 最小算术平均法。

$$r_{ij}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}(u_{ik}\wedge u_{jk})}{\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{m}(u_{ik}+u_{jk})}.$$

9. 最小几何平均法。

$$r_{ij}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}(u_{ik}\wedge u_{jk})}{\sum\limits_{k=1}^{m}\sqrt{u_{ik}u_{jk}}}.$$

如果分类对象 u_i，u_j 的所有特征数据 u_{ik}，$u_{jk}\in[0,1]$，

$k=1,2,\cdots,m$，则 u_i，u_j 可看作 Fuzzy 向量 $u_i=(u_{i1},u_{i2},\cdots,u_{im})$，$u_j=(u_{j1},u_{j2},\cdots,u_{jm})$，以它们的贴近度表达相似程度。

10．明可夫斯基贴近度法。

$$r_{ij}=1-\frac{1}{n^{1/p}}\left[\sum_{k=1}^{m}|u_{im}-u_{jm}|^p\right]^{1/p},$$

其中参数 $p>0$。

11．格贴近度法。

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ \left(\bigvee_{k=1}^{m}(u_{ik}\wedge u_{jk})\right)\wedge\left(1-\bigwedge_{k=1}^{m}(u_{ik}\vee u_{jk})\right) & i\neq j.\end{cases}$$

12．切比雪夫贴近度法。

$$r_{ij}=\bigwedge_{k=1}^{m}(1-|u_{ik}-u_{jk}|).$$

除上述方法外，还可以请有实际经验的专业人员直接对 u_i 与 u_j 的相似程度评分，作为 r_{ij} 的值。为避免片面性，也可以采用多人评分再取平均值来确定 r_{ij}。

以上方法究竟选用哪一种，不能一概而论。视问题的实际情况而定。

例1 设被分类的对象集 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_5\}$。每个对象的特征数据组如下。

$$u_1=(3,2,4,6,7,4),$$
$$u_2=(6,5,4,3,8,6),$$
$$u_3=(9,5,7,3,2,1),$$
$$u_4=(5,9,4,6,3,8),$$
$$u_5=(4,6,3,7,8,4).$$

利用最小最大法计算相似系数r_{ij}的值。

$$r_{12}=\frac{(3\wedge 6)+(2\wedge 5)+(4\wedge 4)+(6\wedge 3)+(7\wedge 8)+(4\wedge 6)}{(3\vee 6)+(2\vee 5)+(4\vee 4)+(6\vee 3)+(7\vee 8)+(4\vee 6)}$$

$$=\frac{23}{35}=0.66\ .$$

其它r_{ij}可类似计算。于是得到Fuzzy相似方阵

$$\underset{\sim}{R}=\begin{pmatrix} 1 & 0.66 & 0.39 & 0.56 & 0.76 \\ 0.66 & 1 & 0.55 & 0.63 & 0.73 \\ 0.39 & 0.55 & 1 & 0.48 & 0.44 \\ 0.56 & 0.63 & 0.48 & 1 & 0.63 \\ 0.76 & 0.73 & 0.44 & 0.63 & 1 \end{pmatrix},$$

第二步叫做聚类。由标定得到对象之间的Fuzzy相似方阵$\underset{\sim}{R}$之后，运用逐次平方法求出传递闭包$\widehat{\underset{\sim}{R}}$，它是具有Fuzzy等价性的。根据§3.2定理7，截阵$(\widehat{\underset{\sim}{R}})_\alpha$具有普通等价性。可以履行分类的职能。

不过这里出现新情况，当门限高度α从1下降到0时，截阵$(\widehat{\underset{\sim}{R}})_\alpha$以及分类结果都随着改变。因此我们必须阐明$(\widehat{\underset{\sim}{R}})_\alpha$以及分类结果随$\alpha$变化的规律性。

为此，考察任意论域U，有限与否不拘．又设$\underset{\sim}{S}$是U上的Fuzzy等价关系，$\alpha\in[0,1]$，$u\in U$．回顾§1.3：

$$[u]=\{v\,|\,(u,v)\in \underset{\sim}{S}_\alpha\}$$

是u的等价类，等价类的基本性质是

$$(1)\qquad \bigcup_{u\in U}[u]=U$$

(2) $[u]\cap[v]\neq\phi\Longleftrightarrow[u]=[v]$.

以等价类为元素构成U的等价商集

$$U/S_\alpha=\{[u]\,|\,u\in U\}.$$

定理1 设S是任意论域U上的Fuzzy等价关系，又$0\leqslant\alpha<\beta\leqslant1$，那么对任何$A\in U/S_\alpha$，$B\in U/S_\beta$都具有如下性质.

$$A\cap B\neq\phi\Longrightarrow B\subseteq A.$$

证 已知存在$w\in A\cap B$，$\forall b\in B$都适合

$$(w,\ b)\in S_\beta\subseteq S_\alpha.$$

因而$b\in A$，这等于说$B\subseteq A$. □

这个定理指出，若对S_β来说，b与w属于同一等价类，则对S_α来说，b与w也属于同一等价类。因此由S_β所得的分类是由S_α所得的分类的进一步细分，也就是说α从1下降为0时，所得分类逐步归并，形成一个聚类图。我们将通过一个例子说明之。

例2 环境单元的分类。

1984年四川省环保部门为了改善某市市郊工业区的生态环境，曾组织专业人员到该区制药、化工、皮革、电镀等二十多个工厂作实地考查。考查的主要项目之一是确定市郊各河段中的污染物成份及含量。为了节省篇幅而又不失原意，以下对五个工厂写出附近水域中的四种污染物数据

工厂$u_1=(5,\ 5,\ 3,\ 2)$ 工厂$u_2=(2,\ 3,\ 4,\ 5)$

工厂$u_3=(5,\ 5,\ 2,\ 3)$ 工厂$u_4=(1,\ 5,\ 3,\ 1)$

工厂$u_5=(2,\ 4,\ 5,\ 1)$

现在按污染物数据把五个工厂附近的水域分类。

取论域 $U=\{u_1, u_2, \cdots, u_5\}$，按绝对值减数法进行标定。令 $c=0.1$。

$$r_{ij}=1-0.1\sum_{k=1}^{4}|u_{ik}-u_{jk}|$$

得 Fuzzy 相似方阵

$$\underset{\sim}{R}=\begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0.8 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 1 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \\ 0.8 & 0.1 & 1 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 & 1 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0.6 & 1 \end{pmatrix}.$$

运用逐次平方的办法计算传递闭包 $\hat{\underset{\sim}{R}}$：

$$\underset{\sim}{R}^2=\begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.8 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 1 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 & 1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.4 & 0.3 & 0.6 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\underset{\sim}{R}}=\underset{\sim}{R}^4=\begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.8 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 1 & 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0.8 & 0.4 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 1 \end{pmatrix}$$

依次取α—截阵 $(\hat{\underset{\sim}{R}})_\alpha$ 并按 $(\hat{\underset{\sim}{R}})_\alpha$ 将 U 分成等价类，

得

$$(\widehat{R})_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

U 分成五类，即 $\{u_1\}$，$\{u_2\}$，$\{u_3\}$，$\{u_4\}$，$\{u_5\}$。

$$(\widehat{R})_{0.8}=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

U 分成四类，即 $\{u_1,\ u_3\}$，$\{u_2\}$，$\{u_4\}$，$\{u_5\}$。

$$(\widehat{R})_{0.6}=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}.$$

U 分成三类，即 $\{u_1,\ u_3\}$，$\{u_2\}$，$\{u_4,\ u_5\}$。

$$(\widehat{R})_{0.5}=\begin{pmatrix}1&0&1&1&1\\0&1&0&0&0\\1&0&1&1&1\\1&0&1&1&1\\1&0&1&1&1\end{pmatrix}.$$

U 分成两类，即 $\{u_1,\ u_3,\ u_4,\ u_5\}$，$\{u_2\}$。

$$(\hat{R})_{0.4}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

U分成一类，即$\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$本身。

随着α的下降，分类越来越粗，形成一个聚类图，见图1

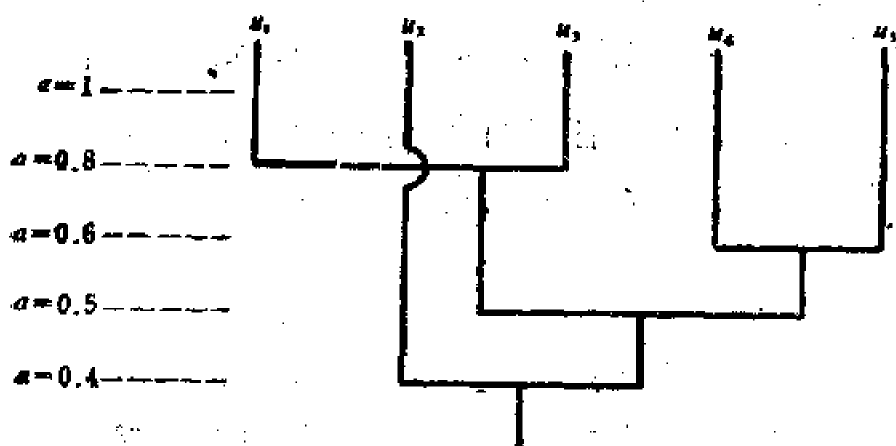


图1

在这个例子中，当 Fuzzy 相似方阵R已经确定之后，还必须算出 Fuzzy 等价方阵$\hat{R}$才能利用$(\hat{R})_\alpha$分类。其实，如果把 Fuzzy 相似方阵表为 Fuzzy 图，那么不必计算$\hat{R}$依然获得同样的分类结果。这就是所谓 Fuzzy 聚类的最大生成树法，具体作法如下。

首先将 Fuzzy 相似方阵R表为 Fuzzy 图G，见图2，其

中已略去了端点相同的边线。

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0.8 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 1 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \\ 0.8 & 0.1 & 1 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 & 1 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0.6 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \text{图2}$$

其次，求G的最大生成树T，见图3。在T中，介于0与1之间的门限高度$\alpha=0.8$，0.6，0.5，0.4。

再其次，对于给定的α，若$E(e)<\alpha$，则把边线e去掉。由§3.4定理2知，G的任意两个不同顶点u，v之间的连通强度$S(u, v)$等于T中唯一的一条路L的强度$S(L)$。去掉

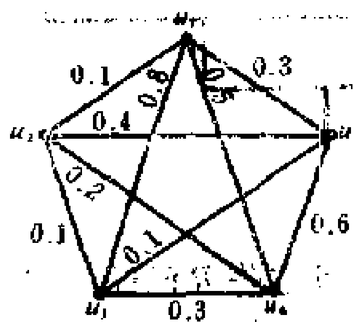


图2

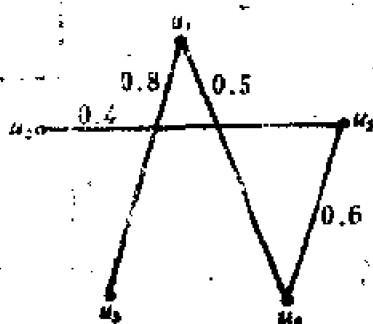


图3

e后，得到一个不连通的Fuzzy图。显然它的各个连通分支就是关于α的类。例如令$\alpha=0.8$则u_1，u_3为一类，其余u_2，u_4，u_5各为一类。见图4。又令$\alpha=0.6$则u_1，u_3为一类，u_4，u_5为一类，u_2单独为一类。见图5。

在§3.4的最末一段我们曾经指出，不论选取连通

Fuzzy图的哪一棵最大生成树，都不影响任何两个不同顶点之间的连通强度。因此使用最大生成树法聚类时，聚类结果同最大树的选择无关。另外，对非连通 Fuzzy 图，显然对各连通分支进行聚类即可。

这里是对最大生成树逐次减去边线而实现的，故又称为最大树的减边法。

如果仅仅为了使用某个特定的门限高度 α 分类，那么连最大生成树也不必找，直接在 Fuzzy 图中将强度低于 α 的边线删去，便获得所希望的结果。例如，对特定的门限高度 $\alpha=0.5$，直接在图2中将强度低于 0.5 的边线删去，便得图6。这意味着 u_1，u_2，u_3，u_4，u_5 为一类，u_2 为另一类。



图4

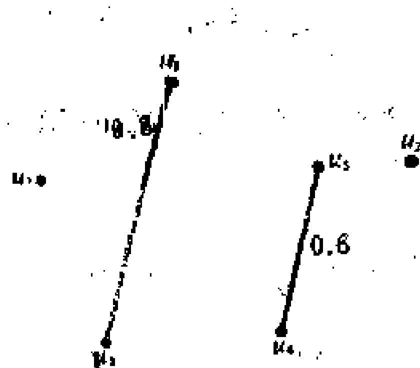


图5

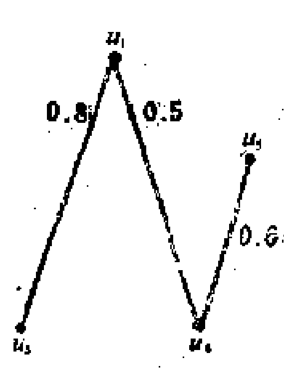


图6

§3.6 Fuzzy 关系的Min-Max传递闭包

一、 Fuzzy 距离关系

以上几节曾使用过 Fuzzy 集的距离、Fuzzy 关系的传递闭包和最大生树的减边聚类法等概念，现在根据这些概念作出对偶的定义。本节还阐述 Fuzzy 等价商集的基本性质。

定义1 设$\underset{\sim}{R}$，$\underset{\sim}{S}$都是论域U上的Fuzzy关系。$(\underset{\sim}{R}^c \circ \underset{\sim}{S}^c)^c$叫做$\underset{\sim}{R}$与$\underset{\sim}{S}$的Min-Max乘法，记作 $\underset{\sim}{R} * \underset{\sim}{S}$。即

$$\underset{\sim}{R} * \underset{\sim}{S} = (\underset{\sim}{R}^c \circ \underset{\sim}{S}^c)^c.$$

着手计算$\underset{\sim}{R} * \underset{\sim}{S}$的隶属度

$$\begin{aligned}(\underset{\sim}{R} * \underset{\sim}{S})(u, v) &= (\underset{\sim}{R}^c \circ \underset{\sim}{S}^c)^c(u, v) \\ &= 1 - \bigvee_{w \in U}[\underset{\sim}{R}^c(u, w) \wedge \underset{\sim}{S}^c(w, v)] \\ &= \bigwedge_{w \in U}[1 - \underset{\sim}{R}^c(u, w) \vee (1 - \underset{\sim}{S}^c(w, v))] \\ &= \bigwedge_{w \in U}[\underset{\sim}{R}(u, w) \vee \underset{\sim}{S}(w, v)].\end{aligned}$$

这个计算结果说明$R * S$命名为Min-Max乘积的原因。与此形成对比的是

$$(\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{S})(u, v) = \bigvee_{w \in U}[\underset{\sim}{R}(u, w) \wedge \underset{\sim}{S}(w, v)],$$

因此$R \circ \underset{\sim}{S}$也往往叫做Max-Min乘积。

由定义直接看出

$$(\underset{\sim}{R} * \underset{\sim}{S})^c = \underset{\sim}{R}^c \circ \underset{\sim}{S}^c, \quad (\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{S})^c = \underset{\sim}{R}^c * \underset{\sim}{S}^c.$$

换言之，Min-Max乘法与Max-Min乘法是互相对偶的运算。另外，还成立着

定理1 设$\underset{\sim}{P}$，$\underset{\sim}{Q}$，$\underset{\sim}{R}$，$\underset{\sim}{S}^{(t)}$，$t \in T$都是U上的Fuzzy关系。那么Min-Max乘法具有下列性质：

(1)结合律 $(\underset{\sim}{P} * \underset{\sim}{Q}) * \underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{P} * (\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{R})$；

(2) 对任意交的左、右分配律

$$R * (\bigcap_{t\in T} S^{(t)}) = \bigcap_{t\in T}(R * S^{(t)}),$$

$$(\bigcap_{t\in T} S^{(t)}) * R = \bigcap_{t\in T}(S^{(t)} * R);$$

(3) 单调律 $P \subseteq Q \Longrightarrow P * R \subseteq Q * R$ 且 $R * P \subseteq R * Q$。

证(1) 利用 Max-Min 乘法的结合律得到

$$((P * Q) * R)^c = (P * Q)^c \circ R^c$$
$$= (P^c \circ Q^c) \circ R^c$$
$$= P^c \circ (Q^c \circ R^c)$$
$$= P^c \circ (Q * R)^c$$
$$= (P * (Q * R))^c,$$

所以 $(P * Q) * R = P * (Q * R)$

(2) $$R * (\bigcap_{t\in T} S^{(t)}) = (R * (\bigcap_{t\in T} S^{(t)}))^{cc}$$
$$= (R^c \circ (\bigcap_{t\in T} S^{(t)})^c)^c$$
$$= (R^c \circ (\bigcup_{t\in T} S^{(t)c}))^c.$$

因为 Max-Min 乘法对任意并满足左分配律，

$$R^c \circ (\bigcup_{t\in T} S^{(t)c}) = \bigcup_{t\in T}(R^c \circ S^{(t)c}),$$

所以

$$R * (\bigcap_{t\in T} S^{(t)}) = (\bigcup_{t\in T}(R^c \circ S^{(t)c}))^c$$

$$=\bigcap_{t\in T}(R^c \circ S^{(t)c})^c$$

$$=\bigcap_{t\in T}(R * S^{(t)}).$$

这就是所需的 Max-Min 乘法对任意交的左分配律。

同理证明

$$(\bigcap_{t\in T} S^{(t)}) * R = \bigcap_{t\in T}(S^{(t)} * R)$$

(3) 设 $P \subseteq Q$，于是 $P^c \supseteq Q^c$. 从而

$$(P * R)^c = P^c \circ R^c \supseteq Q^c \circ R^c.$$

故

$$(P * R) \subseteq (Q^c \circ R^c)^c = Q * R$$

同理推出

$$R * P \subseteq R * Q. \quad \square$$

定义2 论域U上的 Fuzzy 关系叫做 Fuzzy 距离关系。意思是指它满足下列三条件：

(i) 反自反性：$\forall u \in U$，$R(u, u)=0$；

(ii) 对称性：$\forall u, v \in U$，$R(u, v)=R(v, u)$；

(iii) Min-Max 传递性：$R \subseteq R * R$。

具有反自反性、对称性、Min-Max 传递性的 Fuzzy 关系 R 为什么命名为 Fuzzy 距离关系呢?首先，这样的 R 显然满足要求：

$$R(u, v) \geqslant 0;$$

$$u = v \Longrightarrow \underset{\sim}{R}(u, v) \neq 0;$$

$$\underset{\sim}{R}(u, v) = \underset{\sim}{R}(v, u).$$

除此之外，只要对$\underset{\sim}{R}$的隶属度引进运算$\underset{+}{\triangle}$

$$\underset{\sim}{R}(u, w) \underset{+}{\triangle} \underset{\sim}{R}(w, v) = (\underset{\sim}{R} * \underset{\sim}{R})(u, v)$$

那么 Min-Max 传递性给出

$$\underset{\sim}{R}(u, w) \underset{+}{\triangle} \underset{\sim}{R}(w, v) \geqslant \underset{\sim}{R}(u, v)$$

这个不等式不是别的，正是反映"两点之间直线最短"的三角形不等式。总而言之，$\underset{\sim}{R}$的确满足距离概念的种种基本要求。

定理1 给定U上的Fuzzy关系$\underset{\sim}{R}$。$\underset{\sim}{R}$成为Fuzzy等价关系的充分必要条件是$\underset{\sim}{R}^c$成为Fuzzy距离关系。

证 必要性。设$\underset{\sim}{R}$是Fuzzy等价关系。任取u，$v \in U$。我们有

$$\underset{\sim}{R}^c(u, u) = 1 - \underset{\sim}{R}(u, u) = 1;$$

$$\underset{\sim}{R}^c(u, v) = 1 - \underset{\sim}{R}(v, v) = 1 - \underset{\sim}{R}(v, u)$$

$$= \underset{\sim}{R}^c(v, u);$$

$$(\underset{\sim}{R}^c * \underset{\sim}{R}^c)(u, v) = (\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{R})^c(u, v)$$

$$= 1 - (\underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{R})(v, v) \geqslant 1 - \underset{\sim}{R}(u, v)$$

$$= \underset{\sim}{R}^c(u, v).$$

这就是说R^c满足反自反性、对称性与Min-Max传递性。所以R^c是Fuzzy距离关系。

类似地证明充分性。 □

定义3 设$R\in\mathscr{F}(U\times U)$适合下列三条件的Fuzzy关系$\check{R}\in\mathscr{F}(U\times U)$叫做$R$的Min-Max传递闭包。条件是

(i) $\check{R}$包含于R；

(ii) $\check{R}$具有Min-Max传递性；

(iii) 在U上既包含于R又具有Min-Max传递性的任何Fuzzy关系S必包含于$\check{R}$。

设$R\in\mathscr{F}(U\times U)$。引进$R$对Min-Max乘法$*$的正整数次乘方如下

$$R^{*1}=R,\qquad R^{*2}=R*R,$$

$$R^{*3}=R*R*R,\ \cdots.$$

仿照§3.2定理6，不难证明

定理2 每个$R\in\mathscr{F}(U\times U)$的Min-Max传递闭包$\check{R}$是存在的、唯一的；且

$$\check{R}=\bigcap_{k=1}^{+\infty}R^{*k}.$$

定理3 对任何$R \in \mathscr{F}(U\times U)$恒有

$$(\check{R}) = (\widehat{R^c}).$$

证 $(\widehat{R^c}) = R^c \cup (R^c \circ R^c) \cup (R^c \circ R^c \circ R^c) \cup \cdots$

$= R^c \cup (R * R)^c \cup (R * R * R)^c \cup \cdots$

$= (R \cap (R * R) \cap (R * R * R) \cap \cdots)^c$

$= (\check{R})^c.$ □

至此为止，已经明白地看清Fuzzy等价关系R与Fuzzy距离关系R^c是互相对偶的，因此也可以用Fuzzy距离关系作Fuzzy聚类。

定理4 设$R \in \boldsymbol{M}_{n\times n}$具有反自反性。那么对不小于$n-1$的任何正整数$k$，均有

$$\check{R} = R^{*k}. \qquad k \geq n-1.$$

证 因为R有反自反性，所以$R^c \in \boldsymbol{M}_{n\times n}$有自反性。根据§3.2定理6推论1知

$$(R^c)^{n-1} \subseteq (R^c)^n \subseteq (R^c)^{n+1} \subseteq \cdots \subseteq (\widehat{R^c}).$$

另外根据§3.3定理3知

$$(\widehat{R^c}) = (R^c)^{n-1},$$

因此，对任何正整数$k \geq n-1$均有

$$(\widehat{R^c})=(R^c)^k.$$

于是定理 3 得出

$$(\check{R})^c=(\widehat{R^c})=(R^c)^k.$$

从而

$$\check{R}=((R^c)^k)^c=(R^c\circ R^c\circ\cdots\circ R^c)^c$$

$$=R^{cc}*R^{cc}*\cdots*R^{cc}.$$

可见

$$\check{R}=(R)^{*k},\qquad\qquad k\geqslant n-1.$$

这正是我们所需要的。 □

例1 在论域 $U=\{u_1, u_2, \cdots, u_5\}$ 上给定五个 Fuzzy 集

$$A^{(1)}=\frac{0.1}{u_1}+\frac{0.3}{u_2}+\frac{0.6}{u_3}+\frac{0.8}{u_4}+\frac{0.2}{u_5}$$

$$A^{(2)}==\frac{0.8}{u_1}+\frac{0.6}{u_2}+\frac{0.2}{u_3}+\frac{0.9}{u_4}+\frac{0.4}{u_5}$$

$$A^{(3)}=\frac{0.7}{u_1}+\frac{0.4}{u_2}+\frac{0.5}{u_3}+\frac{0.2}{u_4}+\frac{0.1}{u_5}$$

$$A^{(4)}=\frac{0.2}{u_1}+\frac{0.1}{u_2}+\frac{0.3}{u_3}+\frac{0.6}{u_4}+\frac{0.7}{u_5}$$

$$A^{(5)}=\frac{0.3}{u_1}+\frac{0.5}{u_2}+\frac{0.2}{u_3}+\frac{0.9}{u_4}+\frac{0.8}{u_5}$$

试将这五个 Fuzzy 集分类。

首先计算任何两个 Fuzzy 集之间的相对汉明距离

$$H(\underset{\sim}{A}^{(i)}, \underset{\sim}{A}^{(j)})=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5}|\underset{\sim}{A}^{(i)}(u_k)-\underset{\sim}{A}^{(j)}(u_k)|.$$

构成 Fuzzy 方阵

$$\underset{\sim}{R}=\left(H(\underset{\sim}{A}^{(i)}, \underset{\sim}{A}^{(j)})\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0.34 & 0.3 & 0.26 & 0.3 \\ 0.34 & 0 & 0.32 & 0.36 & 0.2 \\ 0.3 & 0.32 & 0 & 0.4 & 0.44 \\ 0.26 & 0.36 & 0.4 & 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.44 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}$$

这个方阵仅具备 Fuzzy 反自反性及 Fuzzy 对称性。未具备 Min-Max 传递性。根据定理 4 将 $\underset{\sim}{R}$ 改造成 Fuzzy 距离方阵 $\check{\underset{\sim}{R}}$,

$$\check{\underset{\sim}{R}}=\begin{pmatrix} 0 & 0.26 & 0.3 & 0.26 & 0.26 \\ & 0 & 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ & & 0 & 0.3 & 0.3 \\ & & & 0 & 0.2 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

由于 $\check{\underset{\sim}{R}}$ 的 Fuzzy 对称性，所以只写出 $\check{R}$ 的上半部分就可以了。

前节讨论 Fuzzy 等价方阵时，我们曾利用最大生成树的减边法进行聚类。本节讨论 Fuzzy 距离方阵，便对偶地利用加边法进行聚类。

仍把 $\underset{\sim}{A}^{(1)}$, $\underset{\sim}{A}^{(2)}$, …, $\underset{\sim}{A}^{(5)}$看作 Fuzzy 图的五个顶点，

$\underset{\sim}{\check{R}}(\underset{\sim}{A}^{(i)}, \underset{\sim}{A}^{(j)})$的数值表征$\underset{\sim}{A}^{(i)}$与$\underset{\sim}{A}^{(j)}$之间的差异程度．现在按照$\underset{\sim}{\check{R}}(\underset{\sim}{A}^{(i)}, \underset{\sim}{A}^{(j)})$从小到大的次序添加边线，使顶点连结起来，并在边线上标明$\underset{\sim}{\check{R}}(\underset{\sim}{A}^{(i)}, \underset{\sim}{A}^{(j)})$的值。若在添加某一条边线时开始形成圈，那么就不画这条边线，直到获得一个连通 Fuzzy 图为止。

第一步，看看$\underset{\sim}{\check{R}}(\underset{\sim}{A}^{(i)}, \underset{\sim}{A}^{(j)})\leqslant 0.2$的情况。由于$\underset{\sim}{\check{R}}(\underset{\sim}{A}^{(2)}, \underset{\sim}{A}^{(4)})\leqslant 0.2$，$\underset{\sim}{\check{R}}(\underset{\sim}{A}^{(2)}, \underset{\sim}{A}^{(5)})\leqslant 0.2$，于是添加边线连结$\underset{\sim}{A}^{(2)}$，$\underset{\sim}{A}^{(4)}$以及$\underset{\sim}{A}^{(2)}$，$\underset{\sim}{A}^{(5)}$，如图1($a$)所示。
这意味着 Fuzzy 距离小于或等于 0.2 的对象作为一类，其它单独作为一类，即$\{\underset{\sim}{A}^{(2)}, \underset{\sim}{A}^{(4)}, \underset{\sim}{A}^{(5)}\}$，$\{\underset{\sim}{A}^{(1)}\}$，$\{\underset{\sim}{A}^{(3)}\}$．在这里，虽然$\underset{\sim}{\check{R}}(\underset{\sim}{A}^{(4)}, \underset{\sim}{A}^{(5)})\leqslant 0.2$，但因为添加边线连结$\underset{\sim}{A}^{(4)}$，$\underset{\sim}{A}^{(5)}$时开始形成圈，所以就不画这条边线了。

第二步，看看$\underset{\sim}{\check{R}}(\underset{\sim}{A}^{(i)}, \underset{\sim}{A}^{(j)})\leq 0.26$的情况。由于$\underset{\sim}{\check{R}}(\underset{\sim}{A}^{(1)}, \underset{\sim}{A}^{(2)})\leq 0.26$，于是添加边线连结$\underset{\sim}{A}^{(1)}$，$\underset{\sim}{A}^{(2)}$．如图1($b$)所示。由此可见$\{\underset{\sim}{A}^{(1)}, \underset{\sim}{A}^{(2)}, \underset{\sim}{A}^{(4)}, \underset{\sim}{A}^{(5)}\}$是一类，$\{\underset{\sim}{A}^{(3)}\}$为另一类。

第三步，至于$\underset{\sim}{\breve{R}}(\underset{\sim}{A}^{(i)}, \underset{\sim}{A}^{(j)})\leqslant 0.3$的情况，则由于$\underset{\sim}{\breve{R}}(\underset{\sim}{A}^{(2)}, \underset{\sim}{A}^{(3)})\leqslant 0.3$，于是添加边线连结$\underset{\sim}{A}^{(2)}$, $\underset{\sim}{A}^{(3)}$。如图1(c)所示。由此可见$\{\underset{\sim}{A}^{(1)}, \underset{\sim}{A}^{(2)}, \underset{\sim}{A}^{(3)}, \underset{\sim}{A}^{(4)}, \underset{\sim}{A}^{(5)}\}$是一类。

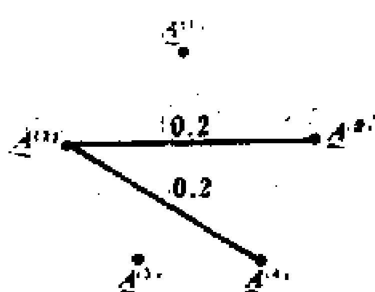


图1(a)

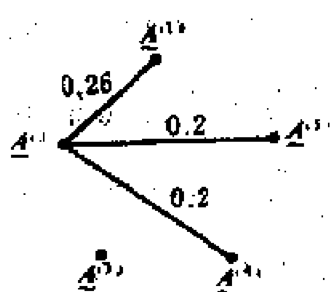


图1(b)

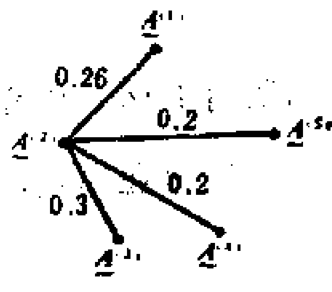


图1(c)

随着距离d的增大，分类越来越粗，形成一个动态聚类图，示于图2。

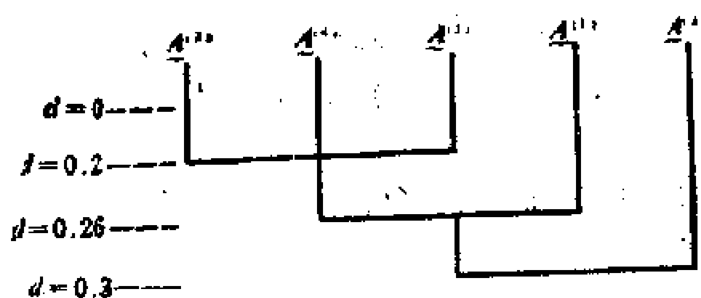


图2

稍加思索便可看出，即使避开$\underset{\sim}{\breve{R}}$而直接按照$\underset{\sim}{R}$的元素值

从小到大逐步添加边线，仍获得同样的聚类结果。

二、Fuzzy 等价商集

以下把普通集合的等价商集发挥成 Fuzzy 等价商集。

定义4 设 R 是论域 U 上的 Fuzzy 等价关系，又 $a\in U$。我们把 U 上的 Fuzzy 集 $\langle a\rangle$ 叫做包含 a 的 Fuzzy 等价类，其隶属函数规定为

$$\langle a\rangle(u)=R(a,u).$$

由所有 Fuzzy 等价类构成的普通集叫做由 Fuzzy 等价关系 R 诱导的普通商集，简称 Fuzzy 等价商集，记作 U/R。即

$$U/R=\{\langle a\rangle \mid a\in U\}.$$

例 2 在论域 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_5\}$ 上给定 Fuzzy 等价关系 R。

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.8 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 1 & 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0.8 & 0.4 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 1 \end{pmatrix}$$

易知包含 u_1 的 Fuzzy 等价类 $\langle u_1\rangle=\frac{1}{u_1}+\frac{0.4}{u_2}+\frac{0.8}{u_3}+\frac{0.5}{u_4}+\frac{0.5}{u_5}$。$\langle u_2\rangle$，$\cdots$，$\langle u_5\rangle$ 等类推。由这些 Fuzzy 等价类构成的 Fuzzy 等价商集是

$$U/R=\{\langle u_1\rangle,\ \langle u_2\rangle,\ \cdots,\ \langle u_5\rangle\}.$$

定理5 设$\underset{\sim}{R}\in\mathscr{F}(U\times U)$具有Fuzzy等价性，$U/\underset{\sim}{R}$为Fuzzy等价商集，那么下列结论均成立：

(1) $\underset{\sim}{R}(a,b)=0\Longleftrightarrow\langle\underset{\sim}{a}\rangle\cap\langle\underset{\sim}{b}\rangle=\phi$；

(2) $\underset{\sim}{R}(a,b)=1\Longleftrightarrow\langle\underset{\sim}{a}\rangle=\langle\underset{\sim}{b}\rangle$；

(3) $\bigcup_{a\in U}\langle\underset{\sim}{a}\rangle=U$；

(4) 映射$\varphi:U\to U/\underset{\sim}{R}$，$a\longmapsto\langle\underset{\sim}{a}\rangle$，具有满性。

证 (1) 设$\underset{\sim}{R}(a,b)=0$。对任何$u\in U$，我们有

$$\begin{aligned}(\langle\underset{\sim}{a}\rangle\cap\langle\underset{\sim}{b}\rangle)(u)&=\langle\underset{\sim}{a}\rangle(u)\wedge\langle\underset{\sim}{b}\rangle(u)=\underset{\sim}{R}(a,u)\wedge\underset{\sim}{R}(b,u)\\&=\underset{\sim}{R}(a,u)\wedge\underset{\sim}{R}(u,b)\leqslant\bigvee_{u\in U}[\underset{\sim}{R}(a,u)\wedge\underset{\sim}{R}(u,b)]\\&=(\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{R})(a,b)=\underset{\sim}{R}(a,b)=0\end{aligned}$$

所以

$$\langle\underset{\sim}{a}\rangle\cap\langle\underset{\sim}{b}\rangle=\phi.$$

反过来，设$\langle\underset{\sim}{a}\rangle\cap\langle\underset{\sim}{b}\rangle=\phi$，于是

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{R}(a,b)&=\underset{\sim}{R}(a,b)\wedge\underset{\sim}{R}(b,b)=\langle\underset{\sim}{a}\rangle(b)\wedge\langle\underset{\sim}{b}\rangle(b)\\&=(\langle\underset{\sim}{a}\rangle\cap\langle\underset{\sim}{b}\rangle)(b)=\phi(b)=0.\end{aligned}$$

(2) 设$\underset{\sim}{R}(a,b)=1$。任取$u\in U$，我们有

$$\begin{aligned}\langle\underset{\sim}{a}\rangle(u)&=\underset{\sim}{R}(a,u)=\underset{\sim}{R}(a,u)\wedge\underset{\sim}{R}(a,b)\\&=\underset{\sim}{R}(b,a)\wedge\underset{\sim}{R}(a,u)\leqslant\bigvee_{v\in U}[\underset{\sim}{R}(b,v)\wedge\underset{\sim}{R}(v,u)]\\&=(\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{R})(b,u)=\underset{\sim}{R}(b,u)=\langle\underset{\sim}{b}\rangle(u)\end{aligned}$$

所以 $\langle \underset{\sim}{a} \rangle \subseteq \langle \underset{\sim}{b} \rangle$. 同理 $\langle \underset{\sim}{b} \rangle \subseteq \langle \underset{\sim}{a} \rangle$. 故 $\langle \underset{\sim}{a} \rangle = \langle \underset{\sim}{b} \rangle$.

反过来，设 $\langle \underset{\sim}{a} \rangle = \langle \underset{\sim}{b} \rangle$. 于是

$$\underset{\sim}{R}(a,b) = \langle \underset{\sim}{a} \rangle(b) = \langle \underset{\sim}{b} \rangle(b) = \underset{\sim}{R}(b,b) = 1$$

(3) 对任何 $u \in U$，我们有

$$(\bigcup_{a \in U} \langle \underset{\sim}{a} \rangle)(u) = \bigvee_{a \in U} \langle \underset{\sim}{a} \rangle(u) \geqslant \langle \underset{\sim}{u} \rangle(u) = \underset{\sim}{R}(u,u) = 1$$

$$= U(u)$$

所以

$$\bigcup_{a \in U} \langle \underset{\sim}{a} \rangle = U.$$

(4) 明显的。 □

这个定理明显地推广了普通等价类的基本性质，我们知道对普通等价类来说，下列性质成立。

(1) $(a,b) \notin E \Longleftrightarrow [a] \cap [b] = \phi$;

(2) $(a,b) \in E \Longleftrightarrow [a] = [b]$;

(3) $\bigcup_{a \in U} [a] = U$;

(4) 映射 $\varphi: U \to U/E$, $a \longmapsto [a]$, 具有满性。

§3.7 Fuzzy 次序的确定

前面几节侧重讨论 Fuzzy 等价关系及其在 Fuzzy 聚类中的应用。除此之外，在实际问题中，还常常需要按照某种特性确定论域元素的先后次序。

设论域 $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$. 由于对象的复杂性及模糊性，确定元素先后次序是比较困难的。例如考虑几顶帽子的优点。人们很自然地从两两比较开始，发现帽子 u_i 比帽子

u_2好。于是将“好”设想为一个Fuzzy集$G \in \mathscr{F}(U)$，u_1对G的隶属度大于u_2对G的隶属度，

$$G(u_1) > G(u_2).$$

但是仅由这样的两两比较来确定次序，往往不满足数学上对“次序”的要求，主要是不满足传递性。可能出现“u_1比u_2好”，“u_2比u_3好”但“u_3比u_1好”的局面。那么怎样在两两比较的基础上确定u_1，u_2，u_3的先后次序呢？这正是本节要阐述的内容。

一、Fuzzy偏序关系

定义 1 具有自反性及传递性的Fuzzy关系叫做Fuzzy预序关系。具有自反性、完全反对称性及传递性的Fuzzy关系叫做Fuuzzy偏序关系。

普通哈斯图表示有限论域上的普通偏序关系是卓有成效的，推广为Fuzzy哈斯图后就能够表示有限论域上的Fuzzy偏序关系。Fuzzy哈斯图的每个点仍然代表论域U的元素。对元素u_i，u_j来说，隶属度$R(u_i, u_j)$的值表达u_i与u_j符合偏序关系的程度。

例 1 给定论域$U=\{u_1, u_2, \cdots, u_5\}$上的Fuzzy方阵

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.7 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.3 \\ 0.9 & 0.6 & 0.8 & 1 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

易知R具有自反性、完全反对称性以及传递性。因此R是

Fuzzy 偏序关系，其Fuzzy哈斯图见图 1。

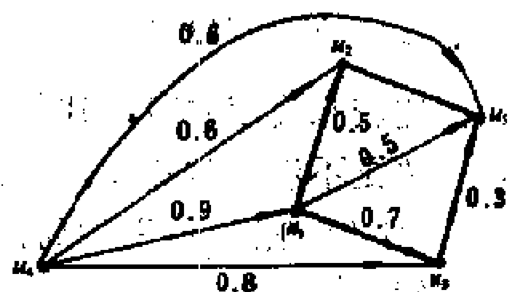


图 1

定义 2 在论域U上给定 Fuzzy 偏序关系 $\underset{\sim}{R}$，又$u\in U$。当且仅当U的其它元素$v\neq u$都使$\underset{\sim}{R}(v,u)=0$时，$u$叫做对$R$来说的优越元。简称优越元。由优越元构成的集叫做对$R$来说的优越集。简称**优越集**。记作$D(U)$，即

$$D(U)=\{u|u\in U,\forall v\neq u,\underset{\sim}{R}(v,u)=0\}$$

在例 1 中$D(U)=\{u_4\}$。

定理 1 给定论域U上的 Fuzzy 偏序关系$\underset{\sim}{R}$以及U的非空子集V。如果$\underset{\sim}{S}\in\mathscr{F}(V\times V)$的隶属函数适合如下条件

$$\underset{\sim}{S}(v_1,v_2)=\underset{\sim}{R}(v_1,v_2)\qquad\forall v_1,v_2\in V.$$

那么$\underset{\sim}{S}$是V上的 Fuzzy 偏序关系。

证 $\underset{\sim}{S}$在V上具有自反性及完全反对称性是明显的，下证$\underset{\sim}{S}$在V上具有传递性。为此，任取$v_1,v_2\in V$。我们有

$$\underset{\sim}{S}^2(v_1,v_2)=\bigvee_{v\in V}[\underset{\sim}{S}(v_1,v)\wedge\underset{\sim}{S}(v,v_2)]$$

$$= \bigvee_{v \in V} [R(v_1, v) \wedge R(v, v_2)]$$

$$\leqslant \bigvee_{u \in U} [R(v_1, u) \wedge R(u, v_2)]$$

$$= R^2(v_1, v_2) \leqslant R(v_1, v_2)$$

$$= S(v_1, v_2).$$

因此$S^2 = S$。这正是所需的。 □

为叙述简便计，定理1中的S依习惯叫做R在V上的收缩。记作$S = R|(V \times V)$。

定理 2 如果R是有限论域U上的Fuzzy偏序关系，那么对R来说，U中必存在着优越元。

证 对U的元素个数使用数学归纳法。当U是单元素集时，定理自动成立。当U是两个元素的集时，利用R的完全反对称性知定理也成立。现在设定理对n元集成立。现证定理对$n+1$元集$U = \{u_1, u_2, \cdots, u_n, u_{n+1}\}$也成立。为此记$V = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$。考虑Fuzzy偏序关系$R$在$V$上的收缩。根据归纳法假设，在$n$元集$V$中存在着优越元，无妨用$u_n$记之（必要时适当调整足标就行了）。于是

$$(R|(V \times V))(u_i, u_n) = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots, n-1.$$

也就是

$$R(u_1, u_n) = R(u_2, u_n) = \cdots = R(u_{n-1}, u_n) = 0.$$

回到U。情况无非两种。

第一种情况：$R(u_{n+1}, u_n) \neq 0$。此时对$\forall v \neq u_n$，$R(v, u_n)$

$=0$。因此，u_n 成为 U 的优越元。

第二种情况，$R(u_{n+1},u_n)\neq 0$。此时由 R 的完全反对称性得知 $R(u_n,u_{n+1})=0$。不仅如此，根据 R 的传递性推出 $R(u_{n-1},u_{n+1})=0$。（否则 $R(u_{n-1},u_n)\geq R(u_{n-1},u_{n+1})\wedge R(u_{n+1},u_n)\neq 0$，即 $R(u_{n-1},u_n)\neq 0$ 前后矛盾）同理 $R(u_{n-2},u_{n+1})=\cdots=R(u_1,u_{n+1})=0$。于是对 $\forall v\neq u_{n+1}$，$R(v,u_{n+1})=0$。因此 u_{n+1} 成为 U 的优越元。

总之，在任何情况下，定理对 $n+1$ 元集 U 也成立。 □

留意，定理2仅对有限论域生效，对无限论域则不能一概而论。现举一例。设论域 U 为正整数集。考察 $R\in\mathscr{F}(U\times U)$。其隶属函数为

$$R(i,j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0.5 & i>j\\ 0 & i<j.\end{cases}$$

R 显然具有自反性及完全反对称性。并且不难验证 $R^2=R$，所以 R 也具有传递性。因此 R 是 U 上的 Fuzzy 偏序关系。然而对任何正整数 i 来说，$R(i+1,i)\neq 0$。换言之，U 对 R 来说并无优越元。

根据定理1及定理2，在有限论域 U 中，借助 Fuzzy 偏序关系 R 必可安排元素的优越次序。其步骤如下。首先借助 R 得到 U 的优越集 $D(U)$。接着在 $V=U\backslash D(U)$ 上借助 $S=R\,(V\times V)$ 得到 V 的优越集 $D(V)$。第三步在 $W=V\backslash D(V)$ 上

借助$T = S|(W \times W)$得到W的优越集$D(W)$。继续进行下去。很明显，$D(U)$的每个元素u'优越于$D(V)$的每个元素v'，而v'优越于$D(W)$的每个元素w'。余类推。用符号记作$u' \propto v' \propto w' \propto \cdots$。

重看前面例1中的Fuzzy偏序方阵

$$
R = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.7 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.3 \\ 0.9 & 0.6 & 0.8 & 1 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

R的第4列除了$R(u_4,u_4)=1$之外，其它$R(u,u_4)=0$。因此$D(U)=\{u_4\}$。

划去R的第4行及第4列，相当于在$V=\{u_1,u_2,u_3,u_5\}$上考察R的收缩。这时

$$
R|(V \times V) = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.7 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 1 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

$R|(V \times V)$的第一列除$(R|(V \times V))(u_1,u_1) = R(u_1,u_1) = 1$之外，其它$(R|(V \times V))(u,u_1)=0$。因此$D(V)=\{u_1\}$。

进一步划去$R|(V \times V)$的第一行及第一列，并记$W=\{u_2,u_3,u_5\}$。类似地得到$D(W)=\{u_2,u_3\}$。

概括起来说，U的所有元素的优越次序为$u_4 \propto u_1 \propto u_2$，$u_3 \propto u_5$。

此法之所以奏效，前提是有一个Fuzzy偏序关系在手，如果缺乏这个前提，可试用下列补充手段。

给定有限论域U上的Fuzzy预序关系R，又$u,v\in U$。令

$$Q(u,v)=\begin{cases}1 & \text{当 } u=v\\ [R(u,v)-R(v,u)]\vee 0 & \text{当 } u\neq v.\end{cases}$$

设Q具备Fuzzy偏序性，则称Q是由R导出的Fuzzy偏序关系。

例2　设$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_5\}$是五种方案的集合。U上的Fuzzy预序为R，

$$R=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0.6 & 0.6 & 0.2\\ 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0.3 & 1 & 1 & 1 & 0.2\\ 0.3 & 0.4 & 0.4 & 0.3 & 1\end{pmatrix}.$$

由R导出$Q\in\mathscr{F}(U\times U)$

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0.6 & 0.3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0.1 & 0.4 & 0.4 & 0.1 & 1\end{pmatrix}.$$

Q显然具有自反性及完全反对称性，并且不难算出$Q^2=Q$。因此Q是由R导出的Fuzzy偏序关系。于是借助Q确定U的元素的优越次序：$u_5\propto u_1\propto u_4\propto u_3\propto u_2$。

二、Fuzzy 对比关系

设 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$。按照某种特性建立 U 上的 Fuzzy 关系 $R=(r_{ij})$。办法是令 u_i 与 u_j 对比，并用 r_{ij} 表示 u_i 长于 u_j 的成份。我们要求

(1) $r_{ii}=0$,

(2) $r_{ij}+r_{ji}=1$. $(i\neq j)$.

这个要求的意思是说，两个事物对比，可能各有所长，把每一方长于对方之处加在一起作为长处的总量，记为 1。故有 $r_{ij}+r_{ji}=1$。自己没有比自己更多的长处，故令 $r_{ii}=0$。如果 u_i 比 u_j 的长处与 u_j 比 u_i 的长处分不出轻重时，则记 $r_{ij}=r_{ji}=0.5$。满足上述要求的 Fuzzy 矩阵 R 叫做规格化 Fuzzy 对比方阵，简称 Fuzzy 对比方阵。

取定门限高度 $\lambda\in[0,1]$，得 λ—截方阵 R_λ。λ 从 1 逐渐下降，若首次出现 R_{λ_1}，使得第 i_1 行元素除主对角线元素之外，处处等于 1，则认为 u_{i_1} 是第一领先对象(不一定唯一)。在 R 中划去第 i_1 行及第 i_1 列，得出阶数较低的 Fuzzy 对比方阵。用同样方法挑出小范围内的第一领先对象作为大范围的第二领先对象。如此类推，可将全体对象排出一定的先后次序。

例 3 设 $U=\{u_1,u_2,u_3\}$。已知规格化 Fuzzy 对比矩阵

$$R=\begin{pmatrix}0 & 0.9 & 0.2\\ 0.1 & 0 & 0.7\\ 0.8 & 0.3 & 0\end{pmatrix}.$$

令 λ 从大到小依次计算 λ-截方阵，得

$$R_{0.9}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad R_{0.8}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$R_{0.7}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\qquad R_{0.3}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

当λ降至0.3时，在$R_{0.3}$中首次出现第3行除主对角线元素之外全部等于1的局面。因此u_3是第一领先对象，u_3比其它元素的长处一致地超过0.3。在R中划去第3行及第3列，得出新的Fuzzy对比矩阵

$$R^{(1)}=\begin{pmatrix}0&0.9\\0.1&0\end{pmatrix}.$$

由于

$$R^{(1)}_{0.9}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},$$

因而u_1为第2领先对象。结论是u_3领先于u_1领先于u_2。记作$u_3\propto u_1\propto u_2$。

利用二元对比确定元素先后的着眼点放在"长处一致超过λ"这一事实。本例中$r_{32}=0.3$，$r_{23}=0.7$，表明u_3长于u_2三分而u_2长于u_3七分。单独比较u_2，u_3，则u_3不如u_2。但是从一致性考虑，我们把u_3排在前面。因此运用此法时，必须注意所论问题是否具有这种特点。

以下谈谈建立规格化Fuzzy对比方阵实际途径。在比较u_i，u_j的过程中，令$f_j(u_i)$表示u_i具有某种指定特性的程度，令$f_i(u_j)$表示u_j具有该特性的程度，

$$0 \leqslant f_j(u_i),\ f_i(u_j) \leqslant 1.$$

又令 $f_i(u_i)=1$。由此写出未规格化的对比方阵

$$\begin{pmatrix} 1 & f_2(u_1) & \cdots & f_n(u_1) \\ f_1(u_2) & 1 & \cdots & f_n(u_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1(u_n) & f_2(u_n) & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

作规格化处理，令

$$r_{ij}=\frac{f_j(u_i)}{f_j(u_i)+f_i(u_j)} \qquad i \neq j,$$

$$r_{ji}=\frac{f_i(u_j)}{f_i(u_j)+f_j(u_i)} \qquad i \neq j,$$

$$r_{ii}=0;$$

即得出规格化 Fuzzy 对比方阵

$$R=\left(r_{ij}\right).$$

不难发现，在规格化 Fuzzy 对比方阵的各行中，取非主对角线元素的最小值，然后找出这些最小值中的最大者所在的行，即可求出第一领先对象。回顾例 3，R 各行非主对角线元素的最小值依次为 0.2，0.1，0.3。其最大者 0.3 位于第 3 行，因此 u_3 为第一领先对象。划去第 3 行及第 3 列后，对新的规格化 Fuzzy 方阵作同样判断，即可得知 u_1 为第二领先对象。

第四章 Fuzzy关系方程

§4.1 Fuzzy关系方程的可解性及其最大解

Fuzzy 关系方程在模糊数学理论及其应用中占有显著地位．在有限论域上寻求 Fuzzy关系方程的解法是讨论的重点．本节首先对任意论域介绍Fuzzy关系方程的基本特性．

Fuzzy 关系方程有两种类型．

已知Fuzzy关系$R\in\mathscr{F}(U\times V)$，$S\in\mathscr{F}(U\times W)$．求Fuzzy关系 $X\in\mathscr{F}(V\times W)$ 满足方程

$$R\circ X=S. \tag{1}$$

或者已知 Fuzzy 关系 $R\in\mathscr{F}(V\times W)$，$S\in\mathscr{F}(U\times W)$．求Fuzzy关系 $Y\in\mathscr{F}(U\times V)$满足方程

$$Y\circ R=S. \tag{2}$$

在(2)的两边考虑转置关系．于是未知关系 $Y^{T}\in\mathscr{F}(V\times U)$ 满足

$$R^{T}\circ Y^{T}=S^{T}.$$

这与(1)是同一种类型．反过来，(1)也可以转化为第二种类型．因此以后只限于求解(1)就够了．由Fuzzy关系的合成法则，(1)可写为

$$\bigvee_{v\in V}[R(u,v)\wedge X(v,w)]=S(u,w)$$

定义1 设P是Fuzzy关系方程 $R\circ X=S$ 的解

(i) P叫做最大解，意思是指，这个方程的任何解X都适合条件 $X\subseteq P$；

(ii) P叫做最小解，意思是指，这个方程的任何解 X 都适合条件 $P\subseteq X$．

从定义直接看出，每个 Fuzzy 关系方程充其量有唯一的最大解，但最大解存在否，则另当别论；对于 Fuzzy 关系方程的最小解，情况也是如此．

在 $[0,1]$ 上定义算子α：

$$a\alpha b=\begin{cases}b & a>b\\ 1 & a\leqslant b\end{cases}$$

算子α对寻求 Fuzzy 关系的最大解，将发挥积极作用．

引理1 对任何$a,b,c\in[0,1]$，有

$$b\geqslant c\Longrightarrow a\alpha b\geqslant a\alpha c\ .$$

证 先看$a>b$的情形．此时$a>c$．根据α的定义便有$a\alpha b=b\geqslant c=a\alpha c$；

再处理$a\leqslant b$的情形．此时$a\alpha b=1\geqslant a\alpha c$．

所以在任何情况下引理1成立． □

推论1 $a\alpha(b\vee c)\geqslant a\alpha c$．

引理2 $a\wedge(a\alpha b)=a\wedge b$，$a\alpha(a\wedge b)\geqslant b$．

定义2 给定 Fuzzy关系$Q\in\mathscr{F}(U\times V)$，$R\in\mathscr{F}(V\times W)$．

我们把$S=Q\overset{\circ}{\alpha}R\in\mathscr{F}(U\times W)$叫做$Q$与$R$的$\alpha$合成，其隶属函数规定为

$$S(u,w)=(Q\overset{\circ}{\alpha}R)(u,w)=\bigwedge_{v\in V}[Q(u,v)\alpha R(v,w)]$$

引理3 设 $Q\in\mathscr{F}(U\times V)$，$R^{(1)}$，$R^{(2)}\in\mathscr{F}(V\times W)$．若$R^{(1)}\subseteq R^{(2)}$，则

$$Q\overset{\circ}{\alpha}R^{(1)}\subseteq Q\overset{\circ}{\alpha}R^{(2)}$$

证 对任何$(v,w)\in V\times W$，已知$R^{(1)}(v,w)\leqslant R^{(2)}(v,w)$。于是

$$\begin{aligned}(Q\overset{\circ}{\alpha}R^{(1)})(u,w)&=\bigwedge_{v\in V}[Q(u,v)\wedge R^{(1)}(v,w)]\\&\leqslant\bigwedge_{v\in V}[Q(u,v)\wedge R^{(2)}(v,w)]\\&=(Q\overset{\circ}{\alpha}R^{(2)})(u,w).\end{aligned}$$

□

定理1 Fuzzy关系方程 $Q\circ X=S$ 可解的充分必要条件是$Q^{T}\overset{\circ}{\alpha}S$成为它的解.还有,在此条件下，$Q^{T}\overset{\circ}{\alpha}S$必为方程的最大解.

证 充分性是自动成立的，我们讨论必要性以及定理的后半部分.

设Fuzzy关系方程$Q\circ X=S$有解$R\in\mathscr{F}(V\times W)$.

(1) 先证 $R\subseteq Q^{T}\overset{\circ}{\alpha}S$.

$$\begin{aligned}(Q^{T}\overset{\circ}{\alpha}S)(v,w)&=(Q^{T}\overset{\circ}{\alpha}(Q\circ R))(v,w)\\&=\bigwedge_{u\in U}[Q^{T}(v,u)\alpha(Q\circ R)(u,w)]\\&=\bigwedge_{u\in U}[Q(u,v)\alpha(\bigvee_{t\in V}(Q(u,t)\wedge R(t,w)))]\end{aligned}$$

$$\geqslant \bigwedge_{v\in U}[Q(u,v)\alpha(Q(u,v)\wedge R(v,w))]$$

根据引理2，$Q(u,v)\alpha(Q(u,v)\wedge R(v,w))\geqslant R(v,w)$．代入上述不等式，得

$$(Q^{T}\overset{\circ}{\alpha}S)(v,w)\geqslant \bigwedge_{v\in U}R(v,w)=R(v,w)\ .$$

所以　$R\subseteq Q^{T}\overset{\circ}{\alpha}S$　．

（2）　现证$Q^{T}\overset{\circ}{\alpha}S$是解，即$Q\circ(Q^{T}\overset{\circ}{\alpha}S)=S$．

既然$R\subseteq Q^{T}\overset{\circ}{\alpha}S$，所以$Q\circ R\subseteq Q\circ(Q^{T}\overset{\circ}{\alpha}S)$，即$S\subseteq Q\circ(Q^{T}\overset{\circ}{\alpha}S)$。反过来，我们有

$$\begin{aligned}[Q\circ(Q^{T}\overset{\circ}{\alpha}S)](u,w)&=\bigvee_{v\in V}[Q(u,v)\wedge(Q^{T}\overset{\circ}{\alpha}S)(v,w)]\\&=\bigvee_{v\in V}[Q(u,v)\wedge(\bigwedge_{t\in U}Q^{T}(v,t)\alpha S(t,w))]\\&\leqslant\bigvee_{v\in V}[Q(u,v)\wedge(Q^{T}(v,u)\alpha S(u,w))]\\&=\bigvee_{v\in V}[Q(u,v)\wedge(Q(u,v)\alpha S(u,w))]\end{aligned}$$

根据引理2，$Q(u,v)\wedge(Q(u,v)\alpha S(u,w))=Q(u,v)\wedge S(u,w)$．代入上述不等式，得

$$\begin{aligned}[Q\circ(Q^{T}\overset{\circ}{\alpha}S)](u,w)&\leqslant\bigvee_{v\in V}[Q(u,v)\wedge S(u,w)]\\&\leqslant\bigvee_{v\in V}S(u,w)=S(u,w)\ ,\end{aligned}$$

因此有　$Q\circ(Q^{T}\overset{\circ}{\alpha}S)\subseteq S$　．

于是　$Q\circ(Q^{\mathrm{T}}\overset{\circ}{\alpha}S)=S$.

至此为止，$Q^{\mathrm{T}}\overset{\circ}{\alpha}S$ 是方程的最大解已明白无疑. □

推论2. Fuzzy关系方程 $Y\circ Q=S$ 可解的充分必要条件是$(Q\overset{\circ}{\alpha}S^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$成为它的解。还有，在此条件下，$(Q\overset{\circ}{\alpha}S^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 必为方程的最大解.

证　$Y\circ Q=S$可解

$\Longleftrightarrow Q^{\mathrm{T}}\circ Y^{\mathrm{T}}=S^{\mathrm{T}}$可解

$\Longleftrightarrow Q\overset{\circ}{\alpha}S^{\mathrm{T}}$是$Q^{\mathrm{T}}\circ Y^{\mathrm{T}}=S^{\mathrm{T}}$的解且是最大解

$\Longleftrightarrow (Q\overset{\circ}{\alpha}S^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 是 $Y\circ Q=S$ 的解且是最大解. □

例1　判定Fuzzy关系方程

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.5 & 0.6 \\ 0.4 & 0.8 & 0.5 \end{pmatrix}\circ X=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.8 \\ 0.6 & 0.7 \end{pmatrix}$$

可解否.

我们利用定理1进行判断. 为此计算 $Q^{\mathrm{T}}\overset{\circ}{\alpha}S$.

$$Q^{\mathrm{T}}\overset{\circ}{\alpha}S=\begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.5 & 0.8 \\ 0.6 & 0.5 \end{pmatrix}\overset{\circ}{\alpha}\begin{pmatrix} 0.5 & 0.8 \\ 0.9 & 0.7 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (0.8\alpha0.5)\wedge(0.4\alpha0.6) & (0.8\alpha0.8)\wedge(0.4\alpha0.7) \\ (0.5\alpha0.5)\wedge(0.8\alpha0.6) & (0.5\alpha0.8)\wedge(0.8\alpha0.7) \\ (0.6\alpha0.5)\wedge(0.5\alpha0.6) & (0.6\alpha0.8)\wedge(0.5\alpha0.7) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.6 & 0.7 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

另外，由于

$$\underset{\sim}{Q}\circ(\underset{\sim}{Q}^{T}\overset{\circ}{\alpha}\underset{\sim}{S})=\begin{bmatrix}0.8 & 0.5 & 0.6\\0.4 & 0.8 & 0.5\end{bmatrix}\circ\begin{pmatrix}0.5 & 1\\0.6 & 0.7\\0.5 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0.5 & 0.8\\0.6 & 0.7\end{pmatrix}=\underset{\sim}{S}$$

故方程有解.

例2 判定 Fuzzy 关系方程

$$\begin{pmatrix}0.8 & 0.5 & 0.6\\0.4 & 0.8 & 0.5\end{pmatrix}\circ\underset{\sim}{X}=\begin{pmatrix}0.5 & 0\\0.6 & 0.7\end{pmatrix}$$

是否有解.

我们来计算$\underset{\sim}{Q}^{T}\overset{\circ}{\alpha}\underset{\sim}{S}$及$\underset{\sim}{Q}\circ(\underset{\sim}{Q}^{T}\overset{\circ}{\alpha}\underset{\sim}{S})$.

$$\underset{\sim}{Q}^{T}\overset{\circ}{\alpha}S=\begin{pmatrix}0.8 & 0.4\\0.5 & 0.8\\0.6 & 0.5\end{pmatrix}\overset{\circ}{\alpha}\begin{pmatrix}0.5 & 0\\0.6 & 0.7\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0.5 & 0\\0.6 & 0\\0.5 & 0\end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{Q}\circ(Q^{T}\overset{\circ}{\alpha}\underset{\sim}{S})=\begin{pmatrix}0.8 & 0.5 & 0.6\\0.4 & 0.8 & 0.5\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0.5 & 0\\0.6 & 0\\0.5 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0.5 & 0\\0.6 & 0\end{pmatrix}\neq\underset{\sim}{S}$$

因此，$\underset{\sim}{Q}^{T}\overset{\circ}{\alpha}\underset{\sim}{S}$并不是方程的解.根据定理1 判定方程不可解

设Fuzzy关系方程 $\underset{\sim}{Q}\circ\underset{\sim}{X}=S$ 可解. 令

$$\mathscr{R} = \left\{ R \mid Q \circ R = S \right\}.$$

$Q^{T} \overset{\circ}{\alpha} S \in \mathscr{R}$. 利用 Fuzzy 关系的合成对任意并的分配性.

$$Q \circ \left(\bigcup_{R \in \mathscr{R}} R \right) = \bigcup_{R \in \mathscr{R}} (Q \circ R) = S.$$

由此可见，$\bigcup_{R \in \mathscr{R}} R$ 是方程的解，因而是方程的最大解，并且

$Q^{T} \overset{\circ}{\alpha} S = \bigcup_{R \in \mathscr{R}} R$. 但是合成对任意交仅仅适合次分配律，

$$Q \circ \left(\bigcap_{R \in \mathscr{R}} R \right) \subseteq \bigcap_{R \in \mathscr{R}} (Q \circ R) = S,$$

所以 $\bigcap_{R \in \mathscr{R}} R$ 不一定是解. 换言之，Fuzzy关系方程 $Q \circ X = S$ 即使可解也未必有最小解；当且仅当 $\bigcap_{R \in \mathscr{R}} R$ 也是方程的解时，最小解才等于 $\bigcap_{R \in \mathscr{R}} R$.

定义3 设 Fuzzy关系方程 $Q \circ X = S$ 的解为 R，又设方程没有解真正包含于 R，则称 R 为方程的一个极小解.

例3 考虑 Fuzzy 关系方程

$$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.7 \\ 0.5 & 0 & 0.6 \end{pmatrix} \circ X = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.4 \end{pmatrix}.$$

检查 $R = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是不是方程的一个极小解.

首先，R 明显地适合方程. 其次任取 X 真正含于 R. 记

$$\underset{\sim}{X}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \subset \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

于是 $a\leqslant 0.4$，$b\leqslant 0.5$ 且不等号至少有一个成立．但是从 $a<0.4$ 得出

$$(0.5\wedge a)\vee(0\wedge b)\vee(0.6\wedge 0)<0.4 \quad ,$$

从 $b<0.5$ 得出

$$(0.3\wedge a)\vee(0.5\wedge b)\vee(0.7\wedge 0)<0.5 \quad .$$

换言之，真正包含于$\underset{\sim}{R}$的任何$\underset{\sim}{X}$永远不能适合方程．

这就说明 $\underset{\sim}{R}$是方程的一个极小解。同理可知另一个

$\underset{\sim}{R}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.4 \end{pmatrix}$也是方程的一个极小解。顺便指出，方程的极小解既然不止一个，所以没有最小解。

定理 2 给定 Fuzzy 关系方程$\underset{\sim}{Q}\circ\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{S}$。若$\underset{\sim}{R}$是方程的一个解，那么介于$\underset{\sim}{R}$与$\underset{\sim}{Q}^T \overset{\circ}{\alpha} \underset{\sim}{S}$之间的任何$\underset{\sim}{X}$，

$$\underset{\sim}{R}\subseteq\underset{\sim}{X}\subseteq\underset{\sim}{Q}^T \overset{\circ}{\alpha} \underset{\sim}{S}$$

都是方程的解。

证 根据合成的单调律，我们由

$$\underset{\sim}{R}\subseteq\underset{\sim}{X}\subseteq\underset{\sim}{Q}^T \overset{\circ}{\alpha} \underset{\sim}{S}$$

得到

$$\underset{\sim}{S}=\underset{\sim}{Q}\circ\underset{\sim}{R}\subseteq\underset{\sim}{Q}\circ\underset{\sim}{X}\subseteq\underset{\sim}{Q}\circ(\underset{\sim}{Q}^T \overset{\circ}{\alpha} \underset{\sim}{S})=\underset{\sim}{S}.$$

所以

$$\underset{\sim}{Q}\circ\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{S}.$$

这正是所需要的结果。 □

以上讨论表明，Fuzzy 关系方程如果可解，则上端必有最大解，但下端的情况较复杂，有待进一步弄清。下节就一类特殊的 Fuzzy 关系方程来讨论最小解的问题。

§4.2 一类特殊 Fuzzy 关系方程的最小解

本节自始至终在有限论域 U、V 上考虑 Fuzzy 关系方程

$$\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{B}.$$

其中 $\underset{\sim}{A} \in \mathscr{F}(U)$，$\underset{\sim}{B} \in \mathscr{F}(V)$，(也就是说，$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$ 分别是从单元素论域到论域 U, V 的Fuzzy 关系)，又 $\underset{\sim}{X} \in \mathscr{F}(U \times V)$。仿照 Fuzzy 关系的 α 合成引进如下定义。

定义 1 设 $\underset{\sim}{A} \in \mathscr{F}(U)$，$\underset{\sim}{B} \in \mathscr{F}(V)$。$\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的 β 合成记作 $\underset{\sim}{A} \overset{\circ}{\beta} \underset{\sim}{B} \in \mathscr{F}(U \times V)$，其隶属函数规定为

$$(\underset{\sim}{A} \overset{\circ}{\beta} \underset{\sim}{B})(u, v) = \underset{\sim}{A}(u) \, \alpha \, \underset{\sim}{B}(v).$$

从 §4.1 定理 1 直接推出

定理 1 若 Fuzzy 关系方程 $\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{B}$ 有解，则 $\underset{\sim}{A} \overset{\circ}{\beta} \underset{\sim}{B}$ 是最大解。

定[0,1]上引进算子 σ：

$$a \sigma b = \begin{cases} b & a \geqslant b \\ 0 & a < b. \end{cases}$$

易知 $a \wedge (a \sigma b) = a \sigma b \leqslant a \wedge b$。

定义 2 设 $\underset{\sim}{A} \in \mathscr{F}(U)$，$\underset{\sim}{B} \in \mathscr{F}(V)$。$\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的 σ 合成

记作$A \overset{\circ}{\sigma} B \in \mathscr{F}(U \times V)$，其隶属函数规定为

$$(A \overset{\circ}{\sigma} B)(u,v) = A(u)\sigma B(v).$$

引理 1 设U，V均为有限论域，$A \in \mathscr{F}(U)$，$B \in \mathscr{F}(V)$。Fuzzy 关系方程$A \circ X = B$有解的充分必要条件是：对任意$v \in V$，存在$u \in U$使$A(u) \geqslant B(v)$，即

$$\{u \mid A(u) \geqslant B(v)\} \neq \phi \qquad (\forall v \in V)$$

证 充分性。设$\forall v \in V$，$\{u \mid A(u) \geqslant B(v)\} \neq \phi$。现证此时$A \overset{\circ}{\beta} B$满足Fuzzy 关系方程。

$$\begin{aligned}(A \circ (A \overset{\circ}{\beta} B))(v) &= \bigvee_{u \in U} [A(u) \wedge (A \overset{\circ}{\beta} B)(u,v)] \\ &= \bigvee_{u \in U} [A(u) \wedge (A(u)\ \alpha\ B(v))] \\ &= \bigvee_{u \in U} [A(u) \wedge B(v)] \\ &= [\bigvee_{u \in U} A(u)] \wedge B(v).\end{aligned}$$

根据给定的条件知$\bigvee_{u \in U} A(u) \geqslant B(v)$，所以

$$(A \circ (A \overset{\circ}{\beta} B))(v) = B(v).$$

即$A \overset{\circ}{\beta} B$是Fuzzy 关系方程的解。

必要性。设$R \in \mathscr{F}(U \times V)$适合Fuzzy 关系方程。即

$$\bigvee_{u \in U} [A(u) \wedge R(u,v)] = B(v).$$

采用反证法。假设$\exists v \in V$使得$\forall u \in U$适合$A(u) < B(v)$。分别处理两种情况。

当 $\underset{\sim}{A}(u)\geqslant\underset{\sim}{R}(u,v)$ 时，$\underset{\sim}{A}(u)\wedge\underset{\sim}{R}(u,v)=\underset{\sim}{R}(u,v)\leqslant$ $\underset{\sim}{A}(u)<\underset{\sim}{B}(v)$；

当 $\underset{\sim}{A}(u)<\underset{\sim}{R}(u,v)$ 时，$\underset{\sim}{A}(u)\wedge\underset{\sim}{R}(u,v)=\underset{\sim}{A}(u)<\underset{\sim}{B}(v)$。因此在任何情况下均有 $\underset{\sim}{A}(u)\wedge\underset{\sim}{R}(u,v)<\underset{\sim}{B}(v)$。由于所讨论的 Fuzzy 关系方程都是在有限论域上给定的，所以

$$\bigvee_{u\in U}[\underset{\sim}{A}(u)\wedge(\underset{\sim}{R}(u,v)]<\bigvee_{u\in U}\underset{\sim}{B}(v)=\underset{\sim}{B}(v)$$

这与已知条件矛盾。 □

对 Fuzzy 关系方程 $\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{B}$，引进集合

$$\Gamma(v)=\{u\mid\underset{\sim}{A}(u)\geqslant\underset{\sim}{B}(v)\},\qquad\forall v\in V.$$

那么引理 1 的另一种写法是：方程有解的充分必要条件是对 $\forall v\in V$，$\Gamma(v)\neq\phi$。

定理 2 若 $\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{B}$ 有解则 $\underset{\sim}{A}\overset{\circ}{\sigma}\underset{\sim}{B}$ 是方程的解。

证 任取 $v\in V$。

$$\begin{aligned}
&(\underset{\sim}{A}\circ(\underset{\sim}{A}\overset{\circ}{\sigma}\underset{\sim}{B}))(v)\\
&=\bigvee_{u\in U}[\underset{\sim}{A}(u)\wedge(\underset{\sim}{A}\overset{\circ}{\sigma}\underset{\sim}{B})(u,v)]\\
&=\bigvee_{u\in U}[\underset{\sim}{A}(u)\wedge(\underset{\sim}{A}(u)\sigma\underset{\sim}{B}(v)]\\
&=\bigvee_{u\in U}[\underset{\sim}{A}(u)\sigma\underset{\sim}{B}(v)]\\
&=[\bigvee_{\substack{u\in U\\ u\in\Gamma(v)}}(\underset{\sim}{A}(u)\sigma\underset{\sim}{B}(v))]\vee[\bigvee_{\substack{u\in U\\ u\notin\Gamma(v)}}(\underset{\sim}{A}(u)\sigma\underset{\sim}{B}(v))].
\end{aligned}$$

由引理 1，$\Gamma(v)\neq\phi$。根据算子 σ 的定义知

$$\text{第一项}\quad \bigvee_{\substack{u\in U\\ u\in\Gamma(v)}} (\underset{\sim}{A}(u)\sigma \underset{\sim}{B}(v)) = \bigvee_{\substack{u\in U\\ u\in\Gamma(v)}} \underset{\sim}{B}(v)$$

$$= \underset{\sim}{B}(v),$$

$$\text{第二项}\quad \bigvee_{\substack{u\in U\\ u\notin\Gamma(v)}} (\underset{\sim}{A}(u)\sigma \underset{\sim}{B}(v)) = 0.$$

代入原式得到

$$(\underset{\sim}{A}\circ(\underset{\sim}{A}\overset{\circ}{\sigma}\underset{\sim}{B}))(v) = \underset{\sim}{B}(v)\vee 0 = \underset{\sim}{B}(v).$$

可见 $\underset{\sim}{A}\overset{\circ}{\sigma}\underset{\sim}{B}$ 是方程的解。 □

推论 1 若 $\underset{\sim}{A}\circ X=\underset{\sim}{B}$ 可解，则满足 $\underset{\sim}{A}\overset{\circ}{\sigma}\underset{\sim}{B}\subseteq \underset{\sim}{X}\subseteq \underset{\sim}{A}\overset{\circ}{\beta}\underset{\sim}{B}$ 的任何 $\underset{\sim}{X}$ 都是方程的解。

证 首先由定理 1 知 $\underset{\sim}{A}\overset{\circ}{\beta}\underset{\sim}{B}$ 是方程的最大解。其次由定理 2 知 $\underset{\sim}{A}\overset{\circ}{\sigma}\underset{\sim}{B}$ 是方程的解。因而根据 § 4.1 定理 2 推出：满足 $\underset{\sim}{A}\overset{\circ}{\sigma}\underset{\sim}{B}\subseteq X\subseteq \underset{\sim}{A}\overset{\circ}{\beta}\underset{\sim}{B}$ 的任何 X 都是方程的解。 □

不过，$\underset{\sim}{A}\overset{\circ}{\sigma}\underset{\sim}{B}$ 即使是 Fuzzy 关系方程 $\underset{\sim}{A}\circ X=\underset{\sim}{B}$ 的解但未必是极小解。

例 1　设 Fuzzy 关系方程 $\underset{\sim}{A}\circ X=\underset{\sim}{B}$ 如下

$$(0.8\quad 0.6)\circ X=(0.5\quad 0.7).$$

首先算出

$$\underset{\sim}{A}\overset{\circ}{\sigma}\underset{\sim}{B}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.7\\ 0.5 & 0\end{pmatrix},$$

$$\underset{\sim}{A} \circ (\underset{\sim}{A} \overset{\circ}{\sigma} \underset{\sim}{B}) = (0.8 \quad 0.6) \circ \begin{pmatrix} 0.6 & 0.7 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (0.5 \quad 0.7) = \underset{\sim}{B}$$

故$\underset{\sim}{A} \overset{\circ}{\sigma} \underset{\sim}{B}$是方程的解。

但是，不难直接检查

$$\underset{\sim}{R}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underset{\sim}{R}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0.7 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

都是方程的解，并且都是极小解，所以由$\underset{\sim}{R}^{(1)}$，$\underset{\sim}{R}^{(2)} \subset \underset{\sim}{A} \overset{\circ}{\sigma} \underset{\sim}{B}$知$\underset{\sim}{A} \overset{\circ}{\sigma} \underset{\sim}{B}$并非方程的极小解.

定理3 Fuzzy关系方程 $\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{B}$ 存在最小解的充分必要条件是：对每个$v \in V$，或者 $\Gamma(v)$是单元素集，或者 $B(v) = 0$.另外，在这个条件下，$\underset{\sim}{A} \overset{\circ}{\sigma} \underset{\sim}{B}$便是方程的最小解.

证 把$\Gamma(v)$的元素个数记作$|\Gamma(v)|$.

先看必要性．已知方程有最小解$\underset{\sim}{R}^{(0)}$。任取 $v_0 \in V$．引理1 指出 $|\Gamma(v_0)| \geqslant 1$．设 $|\Gamma(v_0)| > 1$ 我们现证$\underset{\sim}{B}(v_0) = 0$．为此在 $\Gamma(v_0)$ 中任取两个不相同的 u_{01}，u_{02}并构造$\underset{\sim}{R}^{(1)}$，$\underset{\sim}{R}^{(2)} \in \mathscr{F}(U \times V)$如下：

$$\begin{cases} \underset{\sim}{R}^{(1)}(u_{01}, v_0) = B(v_0), \\ \underset{\sim}{R}^{(1)}(u, v_0) = 0, & u \in U \backslash \{u_{01}\} \\ \underset{\sim}{R}^{(1)}(u, v) = \underset{\sim}{R}^{(0)}(u, v); & (u, v) \in U \times (V \backslash \{v_0\}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underset{\sim}{R}^{(2)}(u_{02}, v_0) = B(v_0), \\ \underset{\sim}{R}^{(2)}(u, v_0) = 0, & u \in U \backslash \{u_{02}\} \\ \underset{\sim}{R}^{(2)}(u, v) = \underset{\sim}{R}^{(0)}(u, v), & (u, v) \in U \times (V \backslash \{v_0\}) \end{cases}$$

着手计算 $\underset{\sim}{A}\circ B^{(1)}$. 任取 $v\in V$. 当 $v=v_0$ 时，

$$
\begin{aligned}
(\underset{\sim}{A}\circ \underset{\sim}{R}^{(1)})(v)&=(\underset{\sim}{A}\circ \underset{\sim}{B}^{(1)})(v_0)\\
&=\bigvee_{u\in U}[\underset{\sim}{A}(u)\wedge \underset{\sim}{R}^{(1)}(u,u_0)]\\
&=\underset{\sim}{A}(u_{01})\wedge \underset{\sim}{R}^{(1)}(u_{01},v_0)\\
&=B(v_0)\ =B(v)\ ;
\end{aligned}
$$

当 $v\neq v_0$ 时，

$$
\begin{aligned}
(A\circ R^{(1)})(v)&=\bigvee_{u\in U}[\underset{\sim}{A}(u)\wedge \underset{\sim}{R}^{(1)}(u,v)]\\
&=\bigvee_{u\in U}[\underset{\sim}{A}(u)\wedge \underset{\sim}{R}^{(0)}(u,v)]\\
&=(\underset{\sim}{A}\circ R^{(0)}(v)\ .\\
&=\underset{\sim}{B}(v)\ .
\end{aligned}
$$

综合起来说，$\underset{\sim}{A}\circ \underset{\sim}{R}^{(1)}=\underset{\sim}{B}$. 同样算出 $\underset{\sim}{A}\circ \underset{\sim}{R}^{(2)}=\underset{\sim}{B}$. 故 $\underset{\sim}{R}^{(1)}$，$\underset{\sim}{R}^{(2)}$ 都是方程的解. 考虑到 $\underset{\sim}{R}^{(0)}$ 是最小解，$R^{(0)}\subseteq \underset{\sim}{R}^{(1)}$，$\underset{\sim}{R}^{(0)}\subseteq R^{(2)}$. 故 $R^{(0)}\subseteq R^{(1)}\cap \underset{\sim}{R}^{(2)}$. 利用 $u_{01}\neq u_{02}$ 推知 $(\underset{\sim}{R}^{(1)}\cap \underset{\sim}{R}^{(2)})(u,\ v_0)=0$ 对任何 $u\in U$ 均成立. 于是对任何 $u\in U$ 有 $R^{(0)}(u,\ v_0)=0$，从而

$$
\begin{aligned}
B(v_0)&=(A\circ R^{(0)})(v_0)\\
&=\bigvee_{u\in U}[\ \underset{\sim}{A}(u)\wedge \underset{\sim}{R}^{(0)}(u,v_0)\ ]\ =0\ .
\end{aligned}
$$

这正是我们所希望的.

其次，看充分性. 已知对每个 $v\in V$，我们或者有 $|\Gamma(v)|=1$ 或者有 $B(v)=0$. 现证 $\underset{\sim}{A}\overset{\circ}{\sigma}\underset{\sim}{B}$ 是方程的最小解. 为此引进 V 的两个子集 V_1 及 V_2：

$$V_1=\{v \mid v\in V,\ |\Gamma(v)|=1\};$$
$$V_2=V\backslash V_1.$$

对每个$v\in V_1$，存在着唯一的$u_v\in U$使$A(u_v)\geqslant B(v)$. 因此，对每个 $v\in V_1$，我们有

$$(A\overset{\circ}{\sigma}B)(u,v)=\begin{cases}B(v) & 当\ u=u_v\\ 0 & 当\ u\neq u_v;\end{cases}$$

对每个$v\in V_2$则有

$$(A\overset{\circ}{\sigma}B)(u,v)=0 \qquad \forall u\in U.$$

根据这两个等式，很容易算出 $A\circ(A\overset{\circ}{\sigma}B)=B$，故$A\overset{\circ}{\sigma}B$是方程的一个解.

接着考察方程的任意解R. 对每个$v\in V_2$以及$u\in U$，$(A\overset{\circ}{\sigma}B)(u,v)=0\leqslant R(u,v)$. 对每个$v\in V_1$及$u\neq u_v$，$(A\overset{\circ}{\sigma}B)(u,v)=0\leqslant R(u,v)$. 对每个 $v\in V_1$ 及 $u=u_v$，$(A\overset{\circ}{\sigma}B)(u,v)=B(v)$. 我们可以断定$(A\overset{\circ}{\sigma}B)(u_v,v)\leqslant R(u_v,v)$照样成立. 不然的话，$R(u_v,v)<(A\overset{\circ}{\sigma}B)(u_v,v)=B(v)$. 从而

$$\begin{aligned}B(v)&=\bigvee_{u\in U}[A(u)\wedge R(u,v)]\\&=[A(u_v)\wedge R(u_v,v)]\vee[\bigvee_{\substack{u\in U\\u\neq u_v}}A(u)\wedge R(u,v)]\\&\leqslant R(u_v,v)\vee[\bigvee_{\substack{u\in U\\u\neq u_v}}A(u)]\end{aligned}$$

对第一项来说，$R(u_v,v)<B(v)$；对二项来说，因 $u\neq u_v$时 $A(u)<B(v)$，故 $\bigvee_{\substack{u\in U\\u\neq u_v}}A(u)<B(v)$. 这样一来导致 $B(v)$

$<B(v)$. 这是不能成立的不等式.

总而言之，在任何情况下均有$(\underset{\sim}{A} \overset{\circ}{\sigma} \underset{\sim}{B})(u,v) \leqslant \underset{\sim}{R}(u,v)$. 所以$\underset{\sim}{A} \overset{\circ}{\sigma} \underset{\sim}{B}$的确是方程的最小解.

到此为止，定理的正确性已明白无疑. □

例2 在论域$U=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$及论域$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_5\}$上分别给定Fuzzy集

$$\underset{\sim}{A}=(0.3 \quad 0.4 \quad 0.9 \quad 0.2),$$

$$\underset{\sim}{B}=(0.9 \quad 0 \quad 0.6 \quad 0.5 \quad 0.8).$$

判别Fuzzy关系方程 $\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{B}$ 有无最小解.

首先计算$\underset{\sim}{A} \overset{\circ}{\beta} \underset{\sim}{B}$

$$\underset{\sim}{A} \overset{\circ}{\beta} \underset{\sim}{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0.6 & 0.5 & 0.8 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

容易验算$\underset{\sim}{A} \circ (\underset{\sim}{A} \overset{\circ}{\beta} \underset{\sim}{B}) = \underset{\sim}{B}$，因而$\underset{\sim}{A} \overset{\circ}{\beta} \underset{\sim}{B}$是方程的解，而且是最大解.

其次对$v=v_2$来说，$B(v_2)=0$；对$v=v_1, v_3, v_4, v_5$来说，$\Gamma(v_1)=\Gamma(v_3)=\Gamma(v_4)=\Gamma(v_5)=\{u_3\}$.

定理3的条件全部满足，因而方程有最小解，且最小解为$\underset{\sim}{A} \overset{\circ}{\sigma} \underset{\sim}{B}$.

$$\underset{\sim}{A} \overset{\circ}{\sigma} \underset{\sim}{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0.6 & 0.5 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

例3　设 $\underset{\sim}{A}=(0.2\quad 0.7\quad 0.9)$，$\underset{\sim}{B}=(0.5\ 0.8\ 0.9)$。试判别Fuzzy关系方程 $\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{B}$ 有无最小解。

首先，$\underset{\sim}{B}(v_1)=0.5$而且 $\underset{\sim}{A}(u_2)=0.7$，$\underset{\sim}{A}(u_3)=0.9$，故 $\Gamma(v_1)=\{u_2,\ u_3\}$。同理 $\Gamma(v_2)=\{u_3\}$，$\Gamma(v_3)=\{u_3\}$。根据引理1得知，方程 $\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{B}$ 有解。

但是由于 $=|\Gamma(v_1)|\neq 1$ 而且 $\underset{\sim}{B}(v_1)\neq 0$，因此根据定理3可以断定方程没有最小解.

也可以换另一种方法，直接检查

$$\underset{\sim}{R}^{(1)}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.9 \end{pmatrix},\quad \underset{\sim}{R}^{(2)}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.8 & 0.9 \end{pmatrix}$$

都是Fuzzy关系方程的极小解，所以它没有最小解.

§ 4.3　Tsukamoto 解法

本节论述任意有限Fuzzy关系方程的求解问题.

给定Fuzzy关系$\underset{\sim}{A}$及$\underset{\sim}{B}$，

$$\underset{\sim}{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}\qquad \underset{\sim}{B}=\begin{pmatrix} b_1^{(1)} & b_1^{(2)},\cdots a_1^{(p)} \\ b_2^{(1)} & b_2^{(2)}\cdots b_2^{(p)} \\ \cdots\cdots & \\ b_m^{(1)} & b_m^{(2)}\cdots b_m^{(p)} \end{pmatrix}$$

求Fuzzy关系

$$
\underset{\sim}{X}=\begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)}\cdots x_1^{(p)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)}\cdots x_2^{(p)} \\ \cdots\cdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)}\cdots x_n^{(p)} \end{pmatrix}
$$

使得满足Fuzzy关系方程

$$
\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{B}
$$

引入记号

$$
\underset{\sim}{X}^{(j)}=\begin{pmatrix} x_1^{(j)} \\ x_2^{(j)} \\ \vdots \\ x_n^{(j)} \end{pmatrix},\qquad \underset{\sim}{B}^{(j)}=\begin{pmatrix} b_1^{(j)} \\ b_2^{(j)} \\ \vdots \\ b_m^{(j)} \end{pmatrix}.
$$

求解上述方程显然等价于求解 p 个Fuzzy关系方程

$$
\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{X}^{(j)}=\underset{\sim}{B}^{(j)}.\qquad j=1,2,\cdots,p
$$

这p个方程两两不牵连，可以逐个处理. 注意到如果把第j个方程的上标 j 省略，那么p个方程都统一纳入

$$
\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{B}
$$

的形式，所以我们只讨论下列Fuzzy关系方程

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}
$$

就行了. 将之展开成为

$$
\begin{cases} (a_{11}\wedge x_1)\vee(a_{12}\wedge x_2)\vee\cdots\vee(a_{1n}\wedge x_n)=b_1 \\ (a_{21}\wedge x_1)\vee(a_{22}\wedge x_2)\vee\cdots\vee(a_{2n}\wedge x_n)=b_2 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ (a_{m1}\wedge x_1)\vee(a_{m2}\wedge x_2)\vee\cdots\vee(a_{mn}\wedge x_n)=b_m. \end{cases}
$$

现在介绍 Tsukamoto 求解这个n元一次 Fuzzy 方程组的方法。

为简便计，在不致引起误解的情况下，略去Fuzzy 矩阵$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{X}$，$\underset{\sim}{B}$，等字母下的波纹号，并允许把列矩阵写成行矩阵. 例如，

$$\underset{\sim}{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

可写为 $X=(x_1\ \ x_2\cdots x_n)$.

首先在[0,1]上规定两个算子ε，$\hat{\varepsilon}$：

$$a\varepsilon b=\begin{cases} b & \text{当} a>b \\ [b,1] & \text{当} a=b \\ \phi & \text{当} a<b \end{cases};$$

$$a\,\hat{\varepsilon}\,b=\begin{cases} [0,b] & \text{当} a>b \\ [0,1] & \text{当} a\leqslant b \end{cases}.$$

并从简单的情况入手 .

（一） 考虑一元一次方程

$$a\wedge x=b$$

若$a>b$则$x=b$；若$a=b$则$x=[b,1]$；若$a<b$则方程无解. 因此方程的解集为$a\varepsilon b$.

（二） 考虑一元一次不等式

$$a\wedge x\leqslant b$$

若$a>b$ 则$x=[0,b]$；若$a\leqslant b$则$x=[0,1]$.因此不等式的解集

为 $a \hat{\varepsilon} b$ 。

（三） 考虑 n 元一次方程

$$(a_1 \wedge x_1) \vee (a_2 \wedge x_2) \vee \cdots \vee (a_n \wedge x_n) = b, \qquad (1)$$

它对应着 n 个一元一次方程

$$a_1 \wedge x_1 = b, \quad a_2 \wedge x_2 = b, \quad \cdots, \quad a_n \wedge x_n = b; \qquad (2)$$

以及 n 个一元一次不等式

$$a_1 \wedge x_1 \leqslant b, \quad a_2 \wedge x_2 \leqslant b, \quad \cdots, \quad a_n \wedge x_n \leqslant b. \qquad (3)$$

极其明显，$(x_1 x_2 \cdots x_n)$满足方程(1)的充分必要条件是：存在某个 x_i 满足(2)中的方程 $a_i \wedge x_i = b$，而其余 x_j 满足(3)中的不等式 $a_j \wedge x_j \leqslant b$，即 $x_i = a_i \varepsilon b$，$x_j = a_j \hat{\varepsilon} b (j \neq i)$。

令

$$Y = (a_1 \varepsilon b \quad a_2 \varepsilon b \quad \cdots \quad a_n \varepsilon b),$$

$$\widehat{Y} = (a_1 \hat{\varepsilon} b \quad a_2 \hat{\varepsilon} b \quad \cdots \quad a_n \hat{\varepsilon} b).$$

那么从 Y 中任取一非空的 $a_i \varepsilon b$ 替换 $\widehat{Y}$ 中相应的 $a_i \hat{\varepsilon} b$，即可获得方程(1)的一组解。这种替换遍历 Y 的一切非空的 $a_i \varepsilon b$，即可获得方程(1)的所有解。

例1 求解三元一次 Fuzzy 方程

$$(0.3 \wedge x_1) \vee (0.5 \wedge x_2) \vee (0.7 \wedge x_3) = 0.5$$

首先计算 Y 及 $\widehat{Y}$。

$$Y = (0.3 \varepsilon 0.5 \quad 0.5 \varepsilon 0.5 \quad 0.7 \varepsilon 0.5)$$

$$= (\phi \quad [0.5, 1] \quad 0.5)$$

$$\widehat{Y} = (0.3 \hat{\varepsilon} 0.5 \quad 0.5 \hat{\varepsilon} 0.5 \quad 0.7 \hat{\varepsilon} 0.5)$$

$$([0, 1] \quad [0, 1] \quad [0, 0.5])$$

用 Y 中的[0.5, 1]替换 $\widehat{Y}$ 中相应位置的[0, 1]，用 Y 中的0.5替换 $\widehat{Y}$ 中相应位置的[0, 0.5]，便获得方程的两组解

$W^{(1)}$, $W^{(2)}$:

$$W^{(1)}=([0,\ 1]\quad [0.5,\ 1]\quad [0,\ 0.5])$$

$$W^{(2)}=([0,\ 1]\quad [0,\ 1]\quad 0.5).$$

这就是方程的全部解。

从$W^{(1)}$及$W^{(2)}$看出，最大解 $X=(1\quad 1\quad 0.5)$；极小解有两个 $X^{(1)}=(0\quad 0.5\quad 0)$，$X^{(2)}=(0\quad 0\quad 0.5)$；没有最小解。

(四) 最后考虑n元一次方程组

$$\begin{cases}(a_{11}\wedge x_1)\vee(a_{12}\wedge x_2)\vee\cdots\vee(a_{1n}\wedge x_n)=b_1\\(a_{21}\wedge x_1)\vee(a_{22}\wedge x_2)\vee\cdots\vee(a_{2n}\wedge x_n)=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\(a_{m1}\wedge x_1)\vee(a_{m2}\wedge x_2)\vee\cdots\vee(a_{mn}\wedge x_n)=b_m\end{cases}\qquad(4)$$

运用(三)中的方法，求解方程组(4)的每个方程。令

第一个方程的解为 $W_1^{(1)}$, $W_1^{(2)}$, $W_1^{(l_1)}$ $(0\leqslant l_1\leqslant n)$

第二个方程的解为$W_2^{(1)}$, $W_2^{(2)}$, …, $W_2^{(l_2)}$ $(0\leqslant l_2\leqslant n)$

……….

第m个方程的解为$W_m^{(1)}$, $W_m^{(2)}$, …, $W_m^{(l_m)}$ $(0\leqslant l_m\leqslant n)$。于是 Fuzzy 关系方程(4)的全部解为

$$W_1^{(i_1)}\cap W_2^{(i_2)}\cap\cdots\cap W_m^{(i_m)}$$

其中 i_1 遍历{1, 2, …, l_1}, i_2 遍历{1, 2, …, l_2}, …, i_m 遍历{1, 2, …, l_m}。

求解 Fuzzy 关系方程(4)的具体步骤如下. 令

$$Y=\begin{pmatrix} a_{11}\varepsilon b_1 & a_{12}\varepsilon b_1 & \cdots & a_{1n}\varepsilon b_1 \\ \cdots\cdots & & & \\ a_{m1}\varepsilon b_m & a_{m2}\varepsilon b_m & \cdots & a_{mn}\varepsilon b_m \end{pmatrix},$$

$$\widehat{Y}=\begin{pmatrix} a_{11}\hat{\varepsilon} b_1 & a_{12}\hat{\varepsilon} b_1 & \cdots & a_{1n}\hat{\varepsilon} b_1 \\ \cdots\cdots & & & \\ a_{m1}\hat{\varepsilon} b_m & a_{m2}\hat{\varepsilon} b_m & \cdots & a_{mn}\hat{\varepsilon} b_m \end{pmatrix}.$$

从 Y 的每行中选定一非空元素分别替换 $\widehat{Y}$ 中相应位置的元素, 得一矩阵 W. 接着对 W 的每列元素求交, 所得的非空向量即为方程(4)的一组解. 作完所有的替换后可以获得方程(4)的全部解.

例2 求下列 Fuzzy 关系方程的全部解.

$$\begin{cases} (0.3\wedge x_1)\vee(0.2\wedge x_2)\vee(0\wedge x_3)=0.2 \\ (0.5\wedge x_1)\vee(0\wedge x_2)\vee(0.6\wedge x_3)=0.4 \\ (0.2\wedge x_1)\vee(0.2\wedge x_2)\vee(0.1\wedge x_3)=0.2 \end{cases}$$

先计算 Y 及 $\widehat{Y}$

$$Y=\begin{pmatrix} 0.3\,\varepsilon\,0.2 & 0.2\,\varepsilon\,0.2 & 0\,\varepsilon\,0.2 \\ 0.5\,\varepsilon\,0.4 & 0\,\varepsilon\,0.4 & 0.6\,\varepsilon\,0.4 \\ 0.2\,\varepsilon\,0.2 & 0.2\,\varepsilon\,0.2 & 0.1\,\varepsilon\,0.2 \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} 0.2 & [0.2,\ 1] & \phi \\ 0.4 & \phi & 0.4 \\ [0.2,\ 1] & [0.2,\ 1] & \phi \end{pmatrix}
$$

$$
\widehat{Y} = \begin{pmatrix} 0.3\,\varepsilon\,0.2 & 0.2\,\varepsilon\,0.2 & 0\,\varepsilon\,0.2 \\ 0.5\,\varepsilon\,0.4 & 0\,\varepsilon\,0.4 & 0.6\,\varepsilon\,0.4 \\ 0.2\,\varepsilon\,0.2 & 0.2\,\varepsilon\,0.2 & 0.1\,\varepsilon\,0.2 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} [0,\ 0.2] & [0,\ 1] & [0,\ 1] \\ [0,\ 0.4] & [0,\ 1] & [0,\ 0.4] \\ [0,\ 1] & [0,\ 1] & [0,\ 1] \end{pmatrix}
$$

Y 的每一行选定一非空元素，选法共有 $2\times2\times2=8$种。用选定的非空元素替换$\widehat{Y}$中相应位置的元素，接着对每列求交。得

(1)

$$
\begin{pmatrix} 0.2 & [0,\ 1] & [0,\ 1] \\ 0.4 & [0,\ 1] & [0,\ 0.4] \\ [0.2,\ 1] & [0,\ 1] & [0,\ 1] \end{pmatrix}
$$

$$
\longrightarrow (\phi\ [0,\ 1]\ [0,\ 0.4])
$$

$$
\longrightarrow \phi
$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 0.2 & [0,\ 1] & [0,\ 1] \\ 0.4 & [0,\ 1] & [0,\ 0.4] \\ [0,\ 1] & [0.2,\ 1] & [0,\ 1] \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow (\phi\ [0.2,\ 1]\ [0,\ 0.4])$$
$$\longrightarrow \phi$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 0.2 & [0,\ 1] & [0,\ 1] \\ [0,\ 0.4] & [0,\ 1] & 0.4 \\ [0.2,\ 1] & [0,\ 1] & [0,\ 1] \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow (0.2\ [0,\ 1]\ 0.4)$$

(4)

$$\begin{pmatrix} 0.2 & [0,\ 1] & [0,\ 1] \\ [0,\ 0.4] & [0,\ 1] & 0.4 \\ [0,\ 1] & [0.2,\ 1] & [0,\ 1] \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow (0.2\ [0.2,\ 1]\ 0.4)$$

(5)

$$\begin{pmatrix} [0,\ 0.2] & [0.2,\ 1] & [0,\ 1] \\ 0.4 & [0,\ 1] & [0,\ 0.4] \\ [0.2,\ 1] & [0,\ 1] & [0,\ 1] \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow (\phi\ [0.2,\ 1]\ [0,\ 0.4])$$
$$\longrightarrow \phi$$

(6)

$$\begin{pmatrix} [0,\ 0.2] & [0.2,\ 1] & [0,\ 1] \\ 0.4 & [0,\ 1] & [0,\ 0.4] \\ [0,\ 1] & [0.2,\ 1] & [0,\ 1] \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow (\phi\ [0.2,\ 1]\ [0,\ 0.4])$$
$$\longrightarrow \phi$$

(7)

$$\begin{pmatrix} [0,\ 0.2] & [0.2,\ 1] & [0,\ 1] \\ [0,\ 0.4] & [0,\ 1] & 0.4 \\ [0.2,\ 1] & [0,\ 1] & [0,\ 1] \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow (0.2\ [0.2,\ 1]\ 0.4)$$

(8)

$$\begin{pmatrix} [0,\ 0.2] & [0.2,\ 1] & [0,\ 1] \\ [0,\ 0.4] & [0,\ 1] & 0.4 \\ [0,\ 1] & [0.2,\ 1] & [0,\ 1] \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow ([0,\ 0.2]\ [0.2,\ 1]\ 0.4)$$

将空集ϕ舍去，并将其余的(3)，(4)，(7)，(8)综合．这样便获得方程的全部解

$$W^{(1)}=(0.2\ [0,\ 1]\ 0.4),$$
$$W^{(2)}=([0,\ 0.2]\ [0.2,\ 1]\ 0.4).$$

从$W^{(1)}$及$W^{(2)}$看出，最大解$\boldsymbol{X}=(0.2\quad 1\quad 0.4)$，极小解为$X^{(1)}=(0.2\quad 0\quad 0.4)$及$X^{(2)}=(0\quad 0.2\quad 0.4)$．

透过 Tsukamoto 解法，容易明白，有限论域上的可解

Fuzzy 关系方程(4)必有有限个极小解，并且方程具有最小解的充分必要条件是方程具有唯一的极小解。

Tsukamoto 解法存在着明显的不足。当 Fuzzy 矩阵的维数增多时，其计算量便可能以指数律增长。例如考虑方程

$$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.7 & 0.8 \\ 0.5 & 0.4 & 0.4 & 0.9 \\ 0.7 & 0.3 & 0.2 & 0.7 \\ 0.9 & 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.8 & 0.5 & 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.4 \\ 0.4 \\ 0.3 \\ 0.6 \end{pmatrix}.$$

我们有

$$Y=\begin{pmatrix} 0.3\,\varepsilon\,0.7 & 0.2\,\varepsilon\,0.7 & 0.7\,\varepsilon\,0.7 & 0.8\,\varepsilon\,0.7 \\ 0.5\,\varepsilon\,0.4 & 0.4\,\varepsilon\,0.4 & 0.4\,\varepsilon\,0.4 & 0.9\,\varepsilon\,0.4 \\ 0.7\,\varepsilon\,0.4 & 0.3\,\varepsilon\,0.4 & 0.2\,\varepsilon\,0.4 & 0.7\,\varepsilon\,0.4 \\ 0.9\,\varepsilon\,0.3 & 0.6\,\varepsilon\,0.3 & 0.1\,\varepsilon\,0.3 & 0.2\,\varepsilon\,0.3 \\ 0.8\,\varepsilon\,0.6 & 0.5\,\varepsilon\,0.6 & 0.6\,\varepsilon\,0.6 & 0.4\,\varepsilon\,0.6 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \phi & \phi & [0.7,\ 1] & 0.7 \\ 0.4 & [0.4,\ 1] & [0.4,\ 1] & 0.4 \\ 0.4 & \phi & \phi & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & \phi & \phi \\ 0.6 & \phi & [0.6,\ 1] & \phi \end{pmatrix}$$

从 Y 的每一行选定一非空元素，选法共有

$$2\times4\times2\times2\times2=64\text{种。}$$

其中绝大多数选法，或者对应着空解，或者给出重复的解。

或者给出的解已被其它解包含，白费气力。下节介绍的紧凑消元解法能够有效地避免这种弱点。它并不依据每个n元一次Fuzzy 方程的解来构造整个 Fuzzy 关系方程的解，而是将Fuzzy 关系方程作为一个整体处理，先把整个 Fuzzy 关系方程化作最简形式然后着手求解。

§ 4.4 紧凑消元解法

本节继续在有限论域上讨论 Fuzzy 关系方程

$$A \circ X = B \tag{1}$$

的解法。其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

它的另一种写法是

$$
\begin{cases}
(a_{11}\wedge x_1)\vee(a_{12}\wedge x_2)\vee\cdots\vee(a_{1n}\wedge x_n)=b_1 \\
(a_{21}\wedge x_1)\vee(a_{22}\wedge x_2)\vee\cdots\vee(a_{2n}\wedge x_n)=b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(a_{m1}\wedge x_1)\vee(a_{m2}\wedge x_2)\vee\cdots\vee(a_{mn}\wedge x_n)=b_m
\end{cases}
\tag{2}
$$

依代数学的惯例，引进这个方程组的增广矩阵，记号为 $\mathrm{Aug}(A)$，

$$
\mathrm{Aug}(A)=\left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{array}\right)
\tag{3}
$$

为方便计，把 Fuzzy 关系方程(1)，n 元一次 Fuzzy 方程组(2)，增广矩阵(3)同等看待。不失一般性，假定 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_m$。

一、简化矩阵与简化方程

定义 1 给定 $\mathrm{Aug}(A)$ 如(3)，记

$$
r_{ij}=\begin{cases}
0 & \text{如果 } a_{ij}<b_i \\
0 & \text{如果 } a_{ij}\geqslant b_i>0 \text{ 且存在 } k>i \text{ 使 } a_{kj}\wedge b_i>b_k \\
a_{ij} & \text{其它}
\end{cases}
$$

我们把

$$\operatorname{Red}(A)=\left(\begin{array}{cccc|c} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} & b_1 \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} & b_2 \\ \multicolumn{4}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} & b_m \end{array}\right) \tag{4}$$

叫做增广矩阵(3)的简化矩阵。并把

$$\begin{cases} (r_{11}\wedge x_1)\vee(r_{12}\wedge x_2)\vee\cdots\vee(r_{1n}\wedge x_n)=b_1 \\ (r_{21}\wedge x_1)\vee(r_{22}\wedge x_2)\vee\cdots\vee(r_{2n}\wedge x_n)=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (r_{m1}\wedge x_1)\vee(r_{m2}\wedge x_2)\vee\cdots\vee(r_{mn}\wedge x_n)=b_m \end{cases} \tag{5}$$

叫做 Fuzzy 关系方程(2)的简化方程。

例 1　求 Fuzzy 关系方程

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.7 & 0.6 & 1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 1 & 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.8 & 0.5 & 0.1 \end{array}\right)$$

的简化方程。

逐列写出简化矩阵，并且每一列都从下端开始，这样较为省事。因而可得

$$\text{Red}(A)=\left[\begin{array}{ccc|c} 0.7 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.8 & 0.5 & 0.1 \end{array}\right] \tag{6}$$

这个简化矩阵同时代表了待求的简化方程。

我们列举简化矩阵的若干性质备用。

性质1 $r_{ij} \leqslant a_{ij}$。

性质2 $r_{ij} \neq 0 \Longrightarrow r_{ij} \geqslant b_i$。

性质3 $a_{kj} \wedge b_i > b_k \Longrightarrow r_{ij} = 0$。

证 分别考虑两种情况：

当$a_{ij} < b_i$。由定义1知 $r_{ij} = 0$。

当 $a_{ij} \geqslant b_i$。已知 $b_i \wedge b_k \geqslant 0$，因此 $a_{ij} \geqslant b_i > 0$，且存在 $k > i$ 使$a_{kj} \wedge b_i > b_k$。仍由定义1得出 $r_{ij} = 0$。 □

性质4 $r_{ij} > b_i$ 且 $r_{kj} > b_k \Longrightarrow b_i = b_k$。

证 用反证法。

比方说，$b_i > b_k$。此时有 $a_{kj} \wedge b_i > a_k$。由性质3得出 $r_{ij} = 0$。但已知 $r_{ij} > b_i \geqslant 0$。这个矛盾证明了 $b_i = b_k$。 □

性质5 $r_{ij} = 0$且 $a_{ij} \geqslant b_i > 0 \Longrightarrow$ 存在着 $k > i$ 使得 $a_{kj} \wedge b_i > b_k$ 且 $r_{kj} = a_{kj}$。

证 根据定义1，我们知道存在 $k > i$ 使 $a_{kj} \wedge b_i > b_k$。记 $K = \{k \mid k > i,\ a_{kj} \wedge b_i > b_k\} \neq \phi$，$t = \text{Max}\, K$。于是 $t > i$，并且 $a_{tj} \wedge b_i > b_k$。

分别考虑两种情况：

当 $b_t=0$。此时仍由定义 1 知 $r_{tj}=a_{tj}$。

当 $b_t\neq 0$。我们依然断言 r_{tj} 非等于 a_{tj} 不可。事实上，假如 $r_{tj}\neq a_{tj}$ 的话，那么 $r_{tj}=0$ 并且 $a_{tj}>b_t>0$。于是根据定义 1，存在着 $u>t$ 使 $a_{uj}\wedge b_t>b_u$。所以 $u>i$，$a_{uj}\wedge b_i>b_u$，故 $u\in K$，从而 $u\leqslant t$。前后矛盾证明了 $r_{tj}=a_{tj}$。

总而言之，这个 t 便保证性质 5 的确成立。 □

下面讨论关系方程(2)的解同它的简化方程(5)的解两者之间的联系。首先建立两个引理。

引理1 如果($\forall i\forall j$，$a_{ij}\wedge x_j\leqslant b_i$)且($\forall i\exists j_i$，$a_{ij_i}\wedge x_{j_i}=b_i$)，那么对 $\forall i$ 有

$$r_{ij_i}=a_{ij_i}.$$

证 反证法

假如存在 i 使 $r_{ij_i}\neq a_{ij_i}$ 的话，那么由定义 1 推知 $r_{ij_i}=0$ 且 $b_i>0$，进而 $a_{ij_i}\geqslant a_{ij_i}\wedge x_{j_i}=b_i>0$。据此，再此利用定义 1 推知存在 $k>i$ 使 $a_{kj_i}\wedge b_i>b_k$。这样一来由 $a_{kj_i}\wedge x_{j_i}\leqslant b_k$ 得到 $x_{j_i}\leqslant b_k$。于是 $x_{j_i}\leqslant b_k<b_i$。从而 $a_{ij_i}\wedge x_{j_i}\leqslant x_{j_i}<b_i$。这同已知条件 $a_{ij_i}\wedge x_{j_i}=b_i$ 矛盾。 □

引理2 如果($\forall i\forall j$，$r_{ij}\wedge x_j\leqslant b_i$)且($\forall i\exists j_i$，$r_{ij_i}\wedge x_{j_i}=b_i$)，那么对 $\forall i$，$\forall j$ 有

$$a_{ij}\wedge x_j\leqslant b_i.$$

证 当 $r_{ij}\neq 0$ 或者 $b_i=0$ 时，根据定义 1，必然有 $r_{ij}=a_{ij}$。不等式 $a_{ij}\wedge x_j\leqslant a$ 不证自明，所以我们只讨论 $r_{ij}=0$ 并且 $b_i\neq 0$ 的情形就够了。为此，分别考虑以下两种可能

性：

1　$a_{ij}<b_i$.

此时 $a_{ij}\wedge x_j\leqslant b_i$ 自动成立。

2　$a_{ij}\geqslant b_i$.

使用反证法。假如 $a_{ij}\wedge x_j>b_i$ 的话，由于 $a_{ij}\geqslant b_i>0$，利用性质5得知存在 $k>i$ 使 $a_{kj}\wedge b_i>b_k$ 且 $r_{kj}=a_{kj}$。因此，$x_j\geqslant a_{ij}\wedge x_j>b_i>b_k$，从而 $r_{kj}\wedge x_j=a_{kj}\wedge x_j>b_k$。这同已知条件矛盾。

这样一来，在任何情况下都有 $a_{ij}\wedge x_j\leqslant b_i$.　　□

命题1　Fuzzy关系方程（2）与它的简化方程（5）同解。

证　引理1直接指出关系方程的解必适合它的简化方程。反过来，根据引理2，我们由（$\forall i\forall j$，$r_{ij}\wedge x_j\leqslant b_i$）及（$\forall i\exists j_i$，$r_{ij_i}\wedge x_{j_i}=b_i$）推知 $\forall i\forall j$，$a_{ij}\wedge x_j\leqslant b_i$ 并且对 $\forall i$ 都有 $a_{ij_i}\wedge x_{j_i}=b_i$。换言之，简化方程的解也适合关系方程。

总之，两者的确同解。　　□

命题1深刻地预示简化方程（5）在解关系方程（2）的过程中所起的重要作用。下面，我们将以简化方程为立足点，首先给出关系方程有解的一个充分必要条件，然后在关系方程有解的前提下找出唯一的最大解以及所有极小解，从而得到关系方程的全部解。

二、Fuzzy关系方程有解的一个充分必要条件与最大解

现在利用简化矩阵（4）构造一个 n 维Fuzzy列矩阵 $\bar{X}=(\bar{x}_j)_{n\times1}$，其中

$$\bar{x}_j = \begin{cases} 1 & \text{如果 } \forall i,\ r_{ij} \leqslant b_i \\ b_i & \text{如果 } \exists i,\ r_{ij} > b_i \end{cases} \tag{7}$$

根据性质4，$\bar{x}_j$ 的值是确定无疑的。下文以这个 $\bar{X}$ 为工具，推导关系方程（2）有解的一个充分必要条件。

命题2 简化方程（5）有解的充分必要条件是：在(5)中具有非零右端项的每个分方程都至少有一个非零系数。

证 必要性是很明显的。

我们来讨论充分性。任取 $i \in \{1,2,\cdots,m\}$。当 $r_{ij} \leqslant b_i$ 时，自动地有 $r_{ij} \wedge \bar{x}_j \leqslant b_i$；当 $r_{ij} > b_i$ 时，根据式（7）知 $\bar{x}_j = b_i$，从而 $r_{ij} \wedge \bar{x}_j = b_i$。概括起来说，$\forall j$，$r_{ij} \wedge \bar{x}_j \leqslant b_i$。

我们还须进一步断言，$\exists j_i$，$r_{ij_i} \wedge \bar{x}_{j_i} = b_i$。如果 $b_i = 0$，那么断言的正确性已不必多加解释，因此我们只讨论 $b_i \neq 0$ 情形。根据已知条件，此时 $\exists j_i$，$r_{ij_i} \neq 0$，利用性质2，应有 $r_{ij_i} \geqslant b_i$。当 $r_{ij_i} > b_i$，仍由式(7)得出 $\bar{x}_{j_i} = b_i$，因而有 $r_{ij_i} \wedge \bar{x}_{j_i} = b_i$；当 $r_{ij_i} = b_i$，不难看到非有 $\bar{x}_{j_i} \geqslant b_i$ 不可。（事实上，假如 $\bar{x}_{j_i} < b_i$ 的话，那么由（7）可知 $\exists k$，$r_{kj_i} > b_k$，从而 $\bar{x}_{j_i} = b_k < b_i$。由性质3，随即得 $r_{ij_i} = 0$，前后矛盾。）因而仍然有 $r_{ij_i} \wedge \bar{x}_{j_i} = b_i$。

总而言之，$\forall i \forall j$，$r_{ij} \wedge \bar{x}_j \leqslant b_i$ 并且 $\forall i \exists j_i$，$r_{ij_i} \wedge \bar{x}_{j_i} = b_i$，亦即 $\bar{X}$ 是简化方程（5）的解。 □

命题3 如果简化方程（5）可解，那么按式（7）构造的 $\bar{X}$ 是它的最大解。

证 在命题2的证明过程中我们已断言 $\bar{X}$ 是简化方程(5)的解。设 $X = (x_j)_{n \times 1}$ 也是（5）的解。任取 $j \in \{1,2,\cdots,n\}$。

当着$\bar{x}_j=1$时，自然有$x_j\leqslant\bar{x}_j$；当着$\bar{x}_j\neq 1$时，按式（7）存在$i\in\{1,2,\cdots,m\}$使得$r_{ij}>b_i$且$\bar{x}_j=b_i$，于是$r_{ij}\wedge x_j\leqslant b_i=\bar{x}_j$，因此仍然有$x_j\leqslant\bar{x}_j$。

总而言之，$\forall j$，$x_j\leqslant\bar{x}_j$。故$\bar{X}$的确是简化方程（5）的最大解。 □

例1（续）判断简化方程（6）的可解性。

已知

$$\mathrm{Red}(\underset{\sim}{A})=\left(\begin{array}{ccc|c}0.7 & 0 & 0 & 0.2\\0.3 & 0 & 0 & 0.2\\1 & 0 & 0 & 0.2\\0 & 0.8 & 0.5 & 0.1\end{array}\right)\qquad(6)$$

根据命题2，它有解。利用式（7），我们得到最大解

$$\bar{X}=\begin{pmatrix}0.2\\0.1\\0.1\end{pmatrix}$$

三、紧凑矩阵与极小解

从下文开始，除非有特殊声明，一律假设 Fuzzy 关系方程（2）有解。为了减轻求极小解的工作量，我们引入如下的紧凑矩阵。

定义2 给定简化矩阵（4）。按下列规则而得的矩阵称为简化矩阵的紧凑矩阵：

(i) 当右端项$b_p=0$。把简化矩阵的第p行删去；

(ii) 当右端项$b_p\neq 0$。如果存在$b_i\geqslant b_p$且每个$j\in\{1,2,\cdots,n\}$都适合条件（$r_{ij}\neq 0\Longrightarrow r_{pj}\neq 0$），那么把简化矩阵的第$p$行删去；

(iii) 凡是删不掉的行，将它的非零元全部换为这一行的右端项。

简化矩阵（4）的紧凑矩阵显然是唯一地确定的，约定用记号

$$\mathrm{Com}(A)=\left(c_{ij}^{k}\right)_{l\times n}$$

表示。元素 c_{ij}^{k} 的两个下标指出它在紧凑矩阵中的行、列位置，上标 k 指出它由 r_{kj} 变换而来。紧凑矩阵的行数 l 不会超过 m。我们一如既往，把紧凑矩阵等同于紧凑方程。

例1（续）　构造简化矩阵（6）的紧凑矩阵。

已知简化矩阵

$$\mathrm{Red}(A)=\left(\begin{array}{ccc|c}0.7 & 0 & 0 & 0.2\\ 0.3 & 0 & 0 & 0.2\\ 1 & 0 & 0 & 0.2\\ 0 & 0.8 & 0.5 & 0.1\end{array}\right) \tag{6}$$

根据规则，头三行只保留一行，因此

$$\mathrm{Com}(A)=\left(\begin{array}{ccc|c}0.2 & 0 & 0 & 0.2\\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1\end{array}\right). \tag{8}$$

下面着手讨论紧凑方程的极小解。

引理3　简化方程（5）的解也适合它的紧凑方程。

证　设 $X=(x_i)_{m\times 1}$ 是简化方程（5）的解。任取 $i\in\{1,2,\cdots,l\}$ 我们来计算 $(c_{i1}^{k}\wedge x_1)\vee(c_{i2}^{k}\wedge x_2)\vee\cdots\vee(c_{in}^{k}\wedge x_n)=?$. 利用已知等式

$$(r_{k1}\wedge x_1)\vee(r_{k2}\wedge x_2)\vee\cdots\vee(r_{kn}\wedge x_n)=b_k,$$

可得

$$\begin{aligned}&b_k\wedge[(r_{k1}\wedge x_1)\vee(r_{k2}\wedge x_2)\vee\cdots\vee(r_{kn}\wedge x_n)]\\&=b_k\wedge b_k,\end{aligned}$$

即

$$(b_k\wedge r_{k1}\wedge x_1)\vee(b_k\wedge r_{k2}\wedge x_2)\vee\cdots\vee(b_k\wedge r_{kn}\wedge x_n)$$
$$=b_k。$$

故

$$(c_{i1}^k\wedge x_1)\vee(c_{i2}^k\wedge x_2)\vee\cdots\vee(c_{in}^k\wedge x_n)=b_k。$$

因此，X适合紧凑方程的任一分方程。 □

引理4 $\forall j$，$\underset{1\leqslant i\leqslant l}{\mathrm{Max}}\, c_{ij}^k\leqslant\bar{x}_j$．

证 考虑任意的$j\in\{1,2,\cdots,n\}$.

当$\bar{x}_j=1$时，$\underset{1\leqslant i\leqslant l}{\mathrm{Max}}\, c_{ij}^k\leqslant\bar{x}_j$自动成立，所以只讨论$\bar{x}_j\neq1$的情况就行了。根据式（7），此时存在$i$使$r_{ij}>b_i$，又$\bar{x}_j=b_i$。假如待证的不等式不能成立的话，那么必有$u\in\{1,2,\cdots,l\}$使$c_{uj}^v>b_i$，即$b_v>b_i$。但$c_{uj}^v\leqslant r_{vj}$，于是$r_{vj}>b_i\geqslant0$。

这样，$r_{ij}\wedge b_v>b_i$。利用性质3得出$r_{vj}=0$，前后矛盾，因而的确有$\underset{1\leqslant i\leqslant l}{\mathrm{Max}}\, c_{ij}^k\leqslant\bar{x}_j$ □

引理5 紧凑方程的极小解一定适合简化方程。

证 设$X=(x_j)_{n\times1}$是紧凑方程Com(A)的一个极小解．易知$x_j\in\{c_{ij}^k|i=1,2,\cdots,l\}\cup\{0\}$。利用引理4得出$\forall j$，$x_j\leqslant\bar{x}_j$。

为了证明X适合简化方程（5），我们任取它的第k个分方程，并考虑各种可能性。

先设构造紧凑矩阵时，简化矩阵（4）的第k行未被删

去，仅被变换为紧凑矩阵的第 i 行。

已知

$$\left(c_{i1}^{k}\wedge x_1\right)\vee\left(c_{i2}^{k}\wedge x_2\right)\vee\cdots\vee\left(c_{in}^{k}\wedge x_n\right)=b_k,$$

于是

$$(r_{k1}\wedge x_1)\vee(r_{k2}\wedge x_2)\vee\cdots\vee(r_{kn}\wedge x_n)=b_k.$$

另一方面，根据命题 3 得到

$$(r_{k1}\wedge x_1)\vee(r_{k2}\wedge x_2)\vee\cdots\vee(r_{kn}\wedge x_n)$$

$$\leqslant(r_{k1}\wedge \bar{x}_1)\vee(r_{k2}\wedge \bar{x}_2)\vee\cdots\vee(r_{kn}\wedge \bar{x}_n)=b_k,$$

所以

$$(r_{k1}\wedge x_1)\vee(r_{k2}\wedge x_2)\vee\cdots\vee(r_{kn}\wedge x_n)=b_k.$$

这个等式说明 X 适合 Red(A)中每一个未被删去的分方程。

然后设构造紧凑矩阵时，简化矩阵（4）的第 k 行已被删去。

1．$b_k=0$

此时自然有

$$(r_{k1}\wedge x_1)\vee(r_{k2}\wedge x_2)\vee\cdots\vee(r_{kn}\wedge x_n)\geqslant b_k.$$

另一方面根据命题3，将刚才的做法重复一遍，就得到

$$(r_{k1}\wedge x_1)\vee(r_{k2}\wedge x_2)\vee\cdots\vee(r_{kn}\wedge x_n)=b_k.$$

2．$b_k\neq 0$

此时在简化矩阵（4）中必存在某一行（记之为 i 行），它既未被删去，而且适合条件 $b_i\geqslant b_k>0$ 及($\forall j, r_{ij}\neq 0\Longrightarrow r_{kj}\neq 0$)。把上面已获得的结果用于第 i 行，我们有

$$(r_{i1}\wedge x_1)\vee(r_{i2}\wedge x_2)\vee\cdots\vee(r_{in}\wedge x_n)=b_i.$$

于是存在着 j 使 $r_{ij}\wedge x_j=b_i$，因此 $x_j\geqslant b_k$ 并且 $r_{ij}\neq 0$，进而得 $r_{kj}\neq 0$。利用性质2，$r_{kj}\geqslant b_k$. 所以

$$(r_{k1}\wedge x_1)\vee(r_{k2}\wedge x_2)\vee\cdots\vee(r_{kn}\wedge x_n)$$
$$\geqslant r_{kj}\wedge x_j\geqslant b_k.$$

另一方面，根据命题3，将刚才的做法再重复一遍，就得到

$$(r_{k1}\wedge x_1)\vee(r_{k2}\wedge x_2)\vee\cdots\vee(r_{kn}\wedge x)_n=b_k.$$

这样一来，在任何情况下，紧凑方程的极小解的确适合简化方程. □

命题4 简化方程的极小解与紧凑方程的极小解全部相同.

证 由引理3及引理5直接得出. □

紧凑矩阵对寻找简化矩阵的全部极小解是一个很有效的工具. 紧凑矩阵的结构极为特殊. 第一行的每个元素 $c_{11}^{k_1}$，$c_{12}^{k_1}$，…，$c_{1n}^{k_1}$不等于零便等于非零的 b_{k_1}，并且至少有一个元素不为零. 其它各行元素类推. 在常见的情况下，尽管有些右端项在简化矩阵的最右边的列中重复出现，但在构造紧凑矩阵时，重复的右端项已被删去，余下的b_{k_1}，b_{k_2}，…，b_{k_l}适合条件$b_{k_1}>b_{k_2}>\cdots>b_{k_l}\geqslant 0$. 在这种情况下，不大费力便可以从紧凑矩阵直接得到简化矩阵的全部极小解. 例1的式(8)就是一个很好的说明. 从

$$\mathrm{Com}(A)=\left(\begin{array}{ccc|c}0.2 & 0 & 0 & 0.2\\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1\end{array}\right) \tag{8}$$

直接看出，紧凑矩阵有两个极小解

$$X_1=\begin{pmatrix}0.2\\0.1\\0\end{pmatrix},\qquad X_2=\begin{pmatrix}0.2\\0\\0.1\end{pmatrix}$$

根据命题4，它们便是简化矩阵的全部极小解.

到此为止，运用紧凑消元法足以在常见的情况下有效地求出全部极小解.

四、紧凑矩阵包括重复右端项的情形

有时也会遇到紧凑方程 Com(A) 包含相等右端项的情形，即 $b_{k_1} \geqslant b_{k_2} \geqslant \cdots \geqslant b_{k_i} > 0$. 这时我们按照右端项的大小，把紧凑矩阵分块，首先求出每块的极小解，然后把每块的极小解拼成 Com(A)的极小解.

例2 求紧凑方程

$$\mathrm{Com}(A)=\left(\begin{array}{cccc|c} 0.7 & 0 & 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.7 & 0.7 & 0 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0.6 & 0.6 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.6 & 0.6 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0.6 \end{array}\right)$$

的极小解。

对这个Com(A)来说，$b_{k_1}=b_{k_2}=0.7$，$b_{k_3}=b_{k_4}=b_{k_5}=0.6$。前两行及后三行各成一块。

先论第一块，它的极小解显然是$\begin{pmatrix} 0.7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0.7 \\ 0.7 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0.7 \\ 0 \\ 0.7 \end{pmatrix}$。这三个极小解用指标集 $I_{0.7}=\{1,23,24\}$来表示较为方便。1的意思是说四维 Fuzzy 列向量的第一分量为

0.7，其余分量为零。23的意思仿此类推。等等。

次论第二块，它的极小解显然是$\begin{pmatrix}0.6\\0.6\\0\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0.6\\0\\0.6\\0.6\end{pmatrix}$，表作指标集$I_{0.6}=\{12,\ 134\}$。

现在利用$I_{0.7}$及$I_{0.6}$拼成Com(A)的极小解。考虑到$1\in I_{0.7}$及$12\in I_{0.6}$，根据上面的说明，如果四维列向量的第一分量为0.7，第二分量为0.6，其余分量为零，那么这个四维列向量必然适合紧凑方程，把它记作1×2。同理，我们考虑到$1\in I_{0.7}$及$134\in I_{0.6}$，得出紧凑方程的另一解1×34。如此等等。我们得到

1×2，1×34，23×1，23×14，24×1，24×13。

在这六个解中，23×14大于23×1，所以并不是紧凑方程的极小解。同理24×13也不是紧凑方程的极小解，这样一来，我们求得Com(A)的极小解共四个：1×2，1×34，23×1，24×1。分别代表

$$X_1=\begin{pmatrix}0.7\\0.6\\0\\0\end{pmatrix},\quad X_2=\begin{pmatrix}0.7\\0\\0.6\\0.6\end{pmatrix},\quad X_3=\begin{pmatrix}0.6\\0.7\\0.7\\0\end{pmatrix},$$

$$X_4=\begin{pmatrix}0.6\\0.7\\0\\0.7\end{pmatrix}.$$

最后，为了说明紧凑消元法能以比较简便的手续，不重

复也不遗漏地算出方程的全部解，我们考察一个略为复杂的例子。

例3 判别 Fuzzy 方程

$$(x_1,x_2,\cdots,x_7)\circ\begin{pmatrix}0.5&0.1&0.5&0.5&0.9&0.2\\0.2&0.5&0.2&0.5&0.7&0.3\\0.1&0.2&0.1&0.1&0.9&0.2\\0.5&0.5&0.8&0.3&0.6&0.1\\0.4&0.3&0.3&0.4&0.9&0.3\\0.5&0.4&0.4&0.9&0.8&0.1\\0.5&0.5&0.4&0.5&0.9&0.3\end{pmatrix}=$$

$$=(0.5\ 0.5\ 0.5\ 0.5\ 0.8\ 0.3)$$

的可解性，并求它的所有解。

首先写出这方程的增广矩阵

$$\mathrm{Aug}(A)=\left(\begin{array}{ccccccc|c}0.9&0.7&0.9&0.6&0.9&0.8&0.9&0.8\\0.5&0.2&0.1&0.5&0.4&0.5&0.5&0.5\\0.1&0.5&0.2&0.5&0.3&0.4&0.5&0.5\\0.5&0.2&0.1&0.8&0.3&0.4&0.4&0.5\\0.5&0.5&0.1&0.3&0.4&0.9&0.5&0.5\\0.2&0.3&0.2&0.1&0.3&0.1&0.3&0.3\end{array}\right).$$

其简化矩阵

$$\mathrm{Red}(A)=\left(\begin{array}{ccccccc|c}0.9&0&0.9&0&0.9&0&0.9&0.8\\0.5&0&0&0.5&0&0.5&0.5&0.5\\0&0.5&0&0.5&0&0&0.5&0.5\\0.5&0&0&0.8&0&0&0&0.5\\0.5&0.5&0&0&0&0.9&0.5&0.5\\0&0.3&0&0&0.3&0&0.3&0.3\end{array}\right).$$

根据命题 2 知方程可解

$$X=\begin{pmatrix}0.8\\1\\0.8\\0.5\\0.8\\0.5\\0.8\end{pmatrix}$$

紧凑矩阵

$$\mathrm{Com}(A)=\left(\begin{array}{ccccccc|c}0.8&0&0.8&0&0.8&0&0.8&0.8\\0&0.5&0&0.5&0&0&0.5&0.5\\0.5&0&0&0.5&0&0&0&0.5\\0.5&0.5&0&0&0&0.5&0.5&0.5\\0&0.3&0&0&0.3&0&0.3&0.3\end{array}\right).$$

为了求Com(A)的极小解，按照右端项的大小分成三块处理，其中

第一块的极小解　1，3，5，7 $\in I_{0.8}$；

第二块的极小解　12，14，17，24，46，47 $\in I_{0.5}$；

第三块的极小解　2，5，7 $\in I_{0.3}$.

利用 $I_{0.8}$及 $I_{0.5}$ 拼成 Com(A)前四行的解

1×2　1×4　1×7　$\underline{1\times 24}$　$\underline{1\times 46}$　$\underline{1\times 47}$

3×12　3×14　3×17　3×24　3×46　3×47

5×12　5×14　5×17　5×24　5×46　5×47

$\underline{7\times 12}$　$\underline{7\times 14}$　7×1　$\underline{7\times 24}$　$\underline{7\times 46}$　7×4

带横线的项因比某些项大，应删去。于是 $I_{0.8\times 0.5}$ 由余下的

17项构成。换言之，余下来的17项都是Com(A)前四行的极小解。接着利用 $I_{0.8\times0.5}$ 及 $I_{0.3}$ 拼成如下的51项

1×2	$1\times2\times5$	$1\times2\times7$
$1\times4\times2$	$1\times4\times5$	$1\times4\times7$
$1\times7\times2$	$1\times7\times5$	1×7
3×12	$3\times12\times5$	$3\times12\times7$
$3\times14\times2$	$3\times14\times5$	$3\times14\times7$
$3\times17\times2$	$3\times17\times5$	3×17
3×24	$3\times24\times5$	$3\times24\times7$
$3\times46\times2$	$3\times46\times5$	$3\times46\times7$
$3\times47\times2$	$3\times47\times5$	3×47
5×12	5×12	$5\times12\times7$
$5\times14\times2$	5×14	$5\times14\times7$
$5\times17\times2$	5×17	5×17
5×24	5×24	$5\times24\times7$
$5\times46\times2$	5×46	$5\times46\times7$
$5\times47\times2$	5×47	5×47
$7\times1\times2$	$7\times1\times5$	7×1
$7\times4\times2$	$7\times4\times5$	7×4

带横线的项或因比某些项大，或因重复，都应删去。余下的

23项便代表Com(A)的全部极小解X_1, X_2, …, X_{22}。具体地说

$$X_1:1\times 2=\begin{pmatrix}0.8\\0.5\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll}
 & =(0.8\quad 0.5\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0)^T\\
X_2:1\times 4\times 2 & =(0.8\quad 0.3\quad 0\quad 0.5\quad 0\quad 0\quad 0)^T\\
X_3:1\times 4\times 5 & =(0.8\quad 0\quad 0\quad 0.5\quad 0.3\quad 0\quad 0)^T\\
X_4:1\times 4\times 7 & =(0.8\quad 0\quad 0\quad 0.5\quad 0\quad 0\quad 0.3)^T\\
X_5:1\times 7 & =(0.8\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0.5)^T\\
X_6:3\times 12 & =(0.5\quad 0.5\quad 0.8\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0)^T\\
X_7:3\times 14\times 2 & =(0.5\quad 0.3\quad 0.8\quad 0.5\quad 0\quad 0\quad 0)^T\\
X_8:3\times 14\times 5 & =(0.5\quad 0\quad 0.8\quad 0.5\quad 0.3\quad 0\quad 0)^T\\
X_9:3\times 14\times 7 & =(0.5\quad 0\quad 0.8\quad 0.5\quad 0\quad 0\quad 0.3)^T\\
X_{10}:3\times 17 & =(0.5\quad 0\quad 0.8\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0.5)^T\\
X_{11}:3\times 24 & =(0\quad 0.5\quad 0.8\quad 0.5\quad 0\quad 0\quad 0)^T\\
X_{12}:3\times 46\times 2 & =(0\quad 0.3\quad 0.8\quad 0.5\quad 0\quad 0.5\quad 0)^T\\
X_{13}:3\times 46\times 5 & =(0\quad 0\quad 0.8\quad 0.5\quad 0.3\quad 0.5\quad 0)^T\\
X_{14}:3\times 46\times 7 & =(0\quad 0\quad 0.8\quad 0.5\quad 0\quad 0.5\quad 0.3)^T\\
X_{15}:3\times 47 & =(0\quad 0\quad 0.8\quad 0.5\quad 0\quad 0\quad 0.5)^T\\
X_{16}:5\times 12 & =(0.5\quad 0.5\quad 0\quad 0\quad 0.8\quad 0\quad 0)^T\\
X_{17}:5\times 14 & =(0.5\quad 0\quad 0\quad 0.5\quad 0.8\quad 0\quad 0)^T
\end{array}$$

$X_{18}:5\times17=(0.5\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0.8\quad 0\quad 0.5\ )^T$

$X_{19}:5\times24=(\ 0\quad 0.5\quad 0\quad 0.5\quad 0.8\quad 0\quad 0\ )^T$

$X_{20}:5\times46=(\ 0\quad 0\quad 0\quad 0.5\quad 0.8\quad 0.5\quad 0\ )^T$

$X_{21}:5\times47=(\ 0\quad 0\quad 0\quad 0.5\quad 0.8\quad 0\quad 0.5\ )^T$

$X_{22}:7\times1\ =(0.5\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0.8\ )^T$

$X_{23}:7\times4\ =(\ 0\quad 0\quad 0\quad 0.5\quad 0\quad 0\quad 0.8\ )^T$

最大解$\bar{X}$以及全部极小解X_1，X_2，…，X_{23}既已求出，方程的所有解随手可得。方程的所有解构成解集

$$\mathscr{X}=\bigcup_{i=1}^{23}\{X\mid X_i\subseteq X\subseteq\bar{X}\}.$$

但是，如果对原来的 Fuzzy 关系方程使用 Tsukamoto 解法，则需要从

$$4\times3\times2\times4\times5\times3=1440$$

种替换中筛选方程的所有解，计算量剧增。

§4.5 Fuzzy 含度方程

Fuzzy 含度方程从一个有趣的问题开始。某地稀有野生动物保护组织为了确定象群在森林U中的活动区域$M\in\mathscr{P}(U)$，在森林中设立观察哨网$\mathscr{T}=\{T^{(r)}\mid r\in\Gamma,\ T^{(r)}\in\mathscr{P}(U)\}$。当象群触及观察哨$T^{(r)}$，中央控制室立即收到信号，于是观察哨$T^{(r)}$赋值$\sigma_M(T^{(r)})=1$，否则赋值$\sigma_M(T^{(r)})=0$。这样引进了映射

$$\sigma_M:\mathscr{T}\rightarrow\{0,1\}$$

$$T^{(r)}\longmapsto\sigma_M(T^{(r)})=\begin{cases}1 & T^{(r)}\cap M\neq\phi\\ 0 & T^{(r)}\cap M=\phi.\end{cases}$$

我们的问题是已知 $\sigma_M = f$，求解象群的活动区域 M。

如果把M解释为在沿海大陆架U上的石油矿藏分布区域，$T^{(r)}$解释为钻井的有效探测范围，令

$$\sigma_M(T^{(r)}) = \begin{cases} 1 & T^{(r)} \cap M \neq \phi \text{（钻井发现油矿）} \\ 0 & T^{(r)} \cap M = \phi \text{（钻井未发现油矿）}, \end{cases}$$

那么上述问题可解释为：已知各钻井的探测资料$\sigma_M = f$，求矿藏的分布区域。

可以进一步设想矿藏分布用Fuzzy集$\underset{\sim}{M} \in \mathscr{F}(U)$表示，钻井所能探测的有效范围是Fuzzy集$\underset{\sim}{T}^{(r)} \in \mathscr{F}(U)$，隶属度$\underset{\sim}{T}^{(r)}(u)$随着$u$到井心距离的增大而减少，且根据钻井采样中含矿质量而赋值$\sigma_{\underset{\sim}{M}}(\underset{\sim}{T}^{(r)}) \in [0,1]$。如果已知各钻井探测资料$\sigma_{\underset{\sim}{M}} = f$，求矿藏分布。该问题就是下面要阐述的Fuzzy含度方程。

在论域U上给定一族Fuzzy集$\underset{\sim}{\mathscr{T}} = \{\underset{\sim}{T}^{(r)} | \gamma \in \Gamma, \ \underset{\sim}{T}^{(r)} \in \mathscr{F}(U)\}$。设$\underset{\sim}{M} \in \mathscr{F}(U)$对所有$\lambda \in (0,1]$，

令$\underset{\sim}{\mathscr{T}}_\lambda = \{\underset{\sim}{T}_\lambda^{(r)} | \gamma \in \Gamma\}$，

$$\sigma_{\underset{\sim}{M}\lambda} : \underset{\sim}{\mathscr{T}}_\lambda \to \{0,1\},$$

$$\underset{\sim}{T}_\lambda^{(r)} \longmapsto \sigma_{\underset{\sim}{M}_\lambda}(\underset{\sim}{T}_\lambda)^{(r)} = \begin{cases} 1 & \underset{\sim}{T}_\lambda^{(r)} \cap \underset{\sim}{M}_\lambda \neq \phi \\ 0 & \underset{\sim}{T}_\lambda^{(r)} \cap \underset{\sim}{M}_\lambda = \phi. \end{cases}$$

定义1 令

$$\sigma_{\underset{\sim}{M}} : \mathscr{T} \to [0,1],$$

$$T^{(r)} \longmapsto \sigma_{M}(T^{(r)}) = \bigvee_{\lambda\in(0,1]} [\lambda \wedge \sigma_{M_\lambda}(T_\lambda^{(r)})].$$

称σ_M为$(U, \mathscr{T})$上的Fuzzy含度。

定理1 $\sigma_M(T^{(r)}) = \bigvee_{u\in U} [T^r(u) \wedge M(u)]$.

证 任取$\lambda \in (0,1]$以及$r\in \Gamma$。我们有

$$\sigma_{M_\lambda}(T_\lambda^{(r)}) = 1$$

$$\Longleftrightarrow T_\lambda^{(r)} \cap M_\lambda = \phi$$

$$\Longleftrightarrow \exists u\in U, T_\lambda^{(r)}(u) \wedge M_\lambda^{(u)} = 1,$$

$$\Longleftrightarrow \bigvee_{u\in U}[T_\lambda^{(r)}(u) \wedge M_\lambda^{(u)}] = 1.$$

所以

$$\sigma_{M_\lambda}(T^{(r)}) = \bigvee_{u\in U}[T_\lambda^{(r)}(u) \wedge M_\lambda(u)].$$

又

$$\sigma_M(T_\lambda^{(r)}) = \bigvee_{\lambda\in(0,1]} [\lambda \wedge \sigma_{M_\lambda}(T_\lambda^{(r)})]$$

$$= \bigvee_{\lambda\in(0,1]} [\lambda \wedge (\bigvee_{u\in U} T_\lambda^{(r)}(u) \wedge M_\lambda(u))]$$

$$= \bigvee_{u\in U} \bigvee_{\lambda\in(0,1]} [\lambda \wedge T_\lambda^{(r)}(u) \wedge M_\lambda(u)]$$

利用λ-截集的性质

$$T_\lambda^{(r)}(u) \wedge M_\lambda(u) = (T_\lambda^{(r)} \cap M_\lambda)(u)$$

$$= (T^{(r)} \cap M)_\lambda(u) \quad .$$

于是得到

$$\sigma_M(T^{(r)}) = \bigvee_{u\in U} \bigvee_{\lambda\in(0,1]} [\lambda \wedge (T^{(r)} \cap M)_\lambda(u)]$$

$$= \bigvee_{u \in U} (T^{(r)} \cap M)(u)$$

$$= \bigvee_{u \in U} [T^{(r)}(u) \wedge M(u)]。$$

□

这个定理在 Fuzzy 含度方程的求解过程中发挥着重要作用。所谓求解 Fuzzy 含度方程指的是：对论域 U 上的一簇已知 Fuzzy 集 $\mathscr{T} = \left\{T^{(r)} r \in \Gamma, T^{(r)} \in \mathscr{F}(U)\right\}$ 以及已知的映射 $f: \mathscr{T} \to [0,1]$，求未知的 Fuzzy 集 $M \in \mathscr{F}(U)$，使 Fuzzy 含度 σ_M 满足方程

$$\sigma_M = f \quad , \tag{1}$$

也就是满足方程组

$$\sigma_M(T^{(r)}) = f(T^{(r)}), r \in \Gamma。 \tag{2}$$

把定理1用于 $\sigma_M(T^{(r)})$，我们有

$$\bigvee_{u \in U} [T^{(r)}(u) \wedge M(u)] = f(T^{(r)}), r \in \Gamma。 \tag{3}$$

(1)，(2)，(3)彼此等价，且(3)明显地是一个 Fuzzy 关系方程。因此，Fuzzy 含度方程(1)可以转化为Fuzzy 关系方程(3)来求解。

例1 设 $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$，$\mathscr{T} = \left\{T^{(1)}, T^{(2)} \cdots, T^{(m)}\right\}$，其中 u_j 表示区域 U 的第 j 小块，$T^{(i)}$ 表示第 i 钻井的探测范围，见图 1。根据第 i 钻井与 u_j 的距离远近确定 $T^{(i)}(u_j) = r_{ij} \in [0, 1]$。并且根据各钻井的采样分析赋值 $\sigma_M(T^{(i)}) = f_i \in [0, 1]$。于

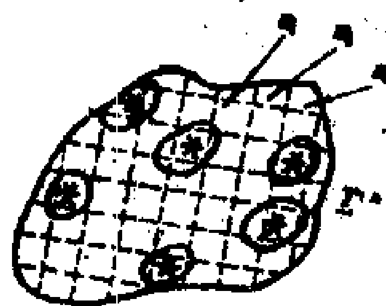


图 1

是矿藏分布

$$\underset{\sim}{M}=\frac{\underset{\sim}{M}(u_1)}{u_1}+\frac{\underset{\sim}{M}(u_2)}{u_2}+\cdots+\frac{\underset{\sim}{M}(u_n)}{u_n}$$

满足 Fuzzy 关系方程

$$\begin{cases}(T^{(1)}(u_1)\wedge \underset{\sim}{M}(u_1))\vee(T^{(1)}(u_2)\wedge \underset{\sim}{M}(u_2))\vee\cdots\vee(T^{(1)}(u_n)\wedge \underset{\sim}{M}(u_n))=f_1\\(T^{(2)}(u_1)\wedge \underset{\sim}{M}(u_1))\vee(T^{(2)}(u_2)\wedge \underset{\sim}{M}(u_2))\vee\cdots\vee(T^{(2)}(u_n)\wedge \underset{\sim}{M}(u_n))=f_2\\\cdots\cdots\\(T^{(m)}(u_1)\wedge \underset{\sim}{M}(u_1))\vee(T^{(m)}(u_2)\wedge \underset{\sim}{M}(u_2))\vee\cdots\vee(T^{(m)}(u_n)\wedge \underset{\sim}{M}(u_n))=f_m.\end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix}r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n}\\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn}\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\\vdots\\f_m\end{pmatrix},$$

其中 x_i 表示 u_i 对 $\underset{\sim}{M}$ 的隶属度 $\underset{\sim}{M}(u_i)$。

§ 4.6 最大—乘积型Fuzzy关系方程

除了前面几节谈到的最大—最小型Fuzzy关系方程之外，在Fuzzy综合评判等应用问题中还会出现最大—乘积型关系方程，设$R \in \mathscr{F}(U \times V)$，$X \in \mathscr{F}(V \times W)$，取实数的普通乘法·代替运算∧，引进Fuzzy关系的运算•，令

$$(R \bullet X)(u,w) = \bigvee_{v \in V} [R(u,v) \cdot X(v,w)]$$

最大—乘积型Fuzzy关系方程的一般形式是

$$R \bullet X = S.$$

容易明白，在有限论域上的任意最大—乘积型Fuzzy关系方程都可以化为

$$A \bullet X = B \tag{1}$$

的形式求解。其中$A \in \boldsymbol{M}_{m \times n}$，$B \in \boldsymbol{M}_{m \times 1}$为已知Fuzzy关系，$X \in \boldsymbol{M}_{n \times 1}$为未知Fuzzy关系。也就是

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{2}$$

现在借签§4.3中的方法来解方程(2)

在[0,1]上引进两个算子φ，$\hat{\varphi}$，

$$a\varphi b = \begin{cases} \dfrac{b}{a} & 当\ a > b \\ 1 & 当\ a = b \\ \phi & 当\ a < b \end{cases};$$

$$a\widehat{\varphi}b=\begin{cases}[0,\frac{b}{a}] & \text{当}a>b\\ [0,1] & \text{当}a\leqslant b\text{。}\end{cases}$$

于是一元一次 Fuzzy 方程 $ax=b$ 的解集为 $a\varphi b$，一元一次 Fuzzy 不等式 $ax\leqslant b$ 的解集为 $a\widehat{\varphi}b$.

考虑n元一次 Fuzzy 方程

$$a_1x_1\vee a_2x_2\vee\cdots\vee a_nx_n=b \tag{3}$$

它对应着n个一元一次 Fuzzy 方程

$$a_1x_1=b,\ a_2x_2=b,\ \cdots,\ a_nx_n=b; \tag{4}$$

以及n个一元一次 Fuzzy 不等式

$$a_1x_1\leqslant b,\ a_2x_2\leqslant b,\ \cdots,\ a_nx_n\leqslant b. \tag{5}$$

很明显，$(x_1,x_2\cdots,x_n)$满足方程(3)的充分必要条件是存在某个x_i满足(4)中的方程 $a_ix_i=b$，而其余的 x_j 满足(5)中的不等式$a_jx_j\leqslant b$，$(j\neq i)$。

令

$$Y=(a_1\varphi b,a_2\varphi b,\cdots,a_n\varphi b)$$

$$\widehat{Y}=(a_1\widehat{\varphi}b,a_2\widehat{\varphi}b,\cdots,a_n\widehat{\varphi}b).$$

从Y中任取一个非空的$a_i\varphi b$替换$\widehat{Y}$中相应的$a_i\widehat{\varphi}b$即可获得方程(3)的一组解。这种替换遍历Y的一切非空的$a_i\varphi b$，即可获得方程(3)的所有解。

把方程(2)写成n元一次 Fuzzy 方程组

$$
\begin{cases}
a_{11} x_1 \vee a_{12} x_2 \vee \cdots \vee a_{1n} x_n = b_1 \\
a_{21} x_1 \vee a_{22} x_2 \vee \cdots \vee a_{2n} x_n = b_2 \\
\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
a_{m1} x_1 \vee a_{m2} x_2 \vee \cdots \vee a_{mn} x_n = b_m.
\end{cases}
\tag{6}
$$

依次解出方程(6)的每一个方程，第i个方程的解记为

$$W_i^{(1)}, W_i^{(2)}, \cdots, W_i^{(l_i)} \quad (0 \leqslant l_i \leqslant n)$$

于是最大一乘积型 Fuzzy 关系方程(2)的全部解为

$$W_1^{(i_1)} \cap W_2^{(i_2)} \cap \cdots \cap W_m^{(i_m)}$$

其中i_1遍历$\{1,2,\cdots,l_1\}$，i_2遍历$\{1,2\cdots,l_2\}$，$\cdots$，i_m遍历$\{1,2,\cdots,l_m\}$。具体步骤如下。令

$$
Y = \begin{bmatrix}
a_{11}\varphi b_1 & a_{12}\varphi b_1 & \cdots & a_{1n}\varphi b_1 \\
a_{21}\varphi b_2 & a_{22}\varphi b_2 & \cdots & a_{2n}\varphi b_2 \\
\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & & & \\
a_{m1}\varphi b_m & a_{m2}\varphi b_m & \cdots & a_{mn}\varphi b_m
\end{bmatrix},
$$

$$
\widehat{Y} = \begin{bmatrix}
a_{11}\widehat{\varphi} b_1 & a_{12}\widehat{\varphi} b_1 & \cdots & a_{1n}\widehat{\varphi} b_1 \\
x_{21}\widehat{\varphi} b_2 & a_{22}\widehat{\varphi} b_2 & \cdots & a_{2n}\widehat{\varphi} b_2 \\
\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & & & \\
a_{m1}\widehat{\varphi} b_m & a_{m2}\widehat{\varphi} b_m & \cdots & a_{mn}\widehat{\varphi} b_m
\end{bmatrix}.
$$

从Y的每行中选定一个非空元素分别替换$\widehat{Y}$中相应位置的元素，得一个矩阵W。接着对W的每列元素求交，所得的非空向量即为方程(2)的一组解。作完所有替换并删去空的、重复的、被包含的解后便获得方程(2)的全部解。

以上是方程(2)的基本解法。透过它容易明白，有限论

域上的最大—乘积Fuzzy关系方程只要可解，必有有限个极小解。

基本解法的缺陷是计算量往往过大，有待改进。记

$$\bar{X}=\begin{pmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \vdots\\ \bar{x}_n\end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_j=\bigwedge_i\left\{\frac{b_i}{a_{ij}}\middle|a_{ij}>b_i\right\}\qquad j=1,2,\cdots,n.$$

其中已约定$\bigwedge\limits_{\phi}=1$。

定理1 最大—乘积型Fuzzy关系方程(2)可解的充分必要条件是$A\cdot\bar{X}=B$；此时$\bar{X}$为方程的最大解．

证 充分性自动成立。因此只检查必要性以及证明定理的后半部就行了。设方程$A\cdot X=B$有解$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$.则

$$\forall i,\ \bigvee_{j=1}^{n}a_{ij}=b_i$$

$$\Longrightarrow\forall i,\forall j,a_{ij}x_j\leqslant b_i$$

$$\Longrightarrow\forall i,\forall j,\begin{cases}当a_{ij}>b_i时,0\leqslant x_j\leqslant\dfrac{b_i}{a_{ij}},\\ 当a_{ij}\leqslant b_i时,0\leqslant x_j\leqslant 1.\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\forall j,0\leqslant x_j\leqslant 1\wedge\left(\bigwedge_i\left\{\frac{b_i}{a_{ij}}\middle|a_{ij}>b_i\right\}\right)=\bar{x}_j$$

于是$X\subseteq\bar{X}$。

不仅如此，$\forall i$，$\forall j$若$a_{ij}>b_i$则

$$\bar{x}_j = \bigwedge_t \left\{ \frac{b_t}{a_{tj}} \middle| a_{tj} > b_t \right\} \leqslant \frac{b_i}{a_{ij}}$$

从而

$$a_{ij}\bar{x}_j \leqslant b_i \text{ .}$$

若$a_{ij} \leqslant b_i$，则

$$a_{ij}\bar{x}_j \leqslant a_{ij} \leqslant b_i,$$

因此

$$\forall i, \bigvee_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j \leqslant b_i.$$

$A \cdot \bar{X} \subseteq B$。于是我们有

$$B = A \cdot X \subseteq A \cdot \bar{X} \subseteq B$$

至此明白看出$A \cdot \bar{X} = B$的确成立，并且$\bar{X}$是方程的最大解 □

推论1 最大—乘积型 Fuzzy 关系不等式$A \cdot X \subseteq B$的最大解是$\bar{X}$。

证 重复定理1的证明步骤即知不等式的每个解 X 适合$X \subseteq \bar{X}$并且$A \cdot \bar{X} \subseteq B$。因此$\bar{X}$是$A \cdot X \subseteq B$的最大解。

对给定的最大—乘积型Fuzzy关系方程(2)，令

$$G_i = \{ j_i \mid a_{ij_i}\bar{x}_{j_i} = b_i \}, \qquad i = 1, 2, \cdots, m.$$

$$G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_m.$$

定理2 Fuzzy关系方程(2)可解的充分必要条件是$G \neq \phi$。

证 (i)充分性。设$G \neq \phi$，即设 $G_i \neq \phi$，$i = 1, 2, \cdots, m$。

任取$j_i \in G_i$，我们有

$$a_{ij_i}\bar{x}_{j_i} = b_i.$$

于是

$$\bigvee_{j=1}^{m} a_{ij}\bar{x}_j \geqslant b_i,$$

因此$A \cdot \bar{X} \supseteq B$

另一方面，由定理1的推论1知 $A \cdot \bar{X} \subseteq B$. 所以$A \cdot \bar{X} = B$ 即方程(2)可解。

(ii)必要性。设$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$是方程(2)的解．则

$$\forall i, \bigvee_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$$

$$\Longrightarrow \forall i, \exists j_i \text{ 使 } a_{ij_i}x_{j_i} = b_i.$$

由定理1知$X \subseteq \bar{X}$及$A \cdot \bar{X} = B$。于是

$$b_i = a_{ij_i}x_{j_i} \leqslant a_{ij_i}\bar{x}_{j_i} \leqslant \bigvee_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j = b_i.$$

故

$$a_{ij_i}\bar{x}_{j_i} = b_i \qquad\qquad i = 1, 2, \cdots, m.$$

所以$j_i \in G_i$。令$g = (j_1, j_2, \cdots, j_m)$，则$g \in G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_m$. 可见$G \neq \phi$. □

定理3 设最大一乘积型 Fuzzy 关系方程(2)可解．对每个$g \doteq (j_1, j_2, \cdots, j_m) \in G$，令

$$X_g = (x_{g1}, x_{g2}, \cdots, x_{gn})^T \quad .$$

$$x_{gh}=\begin{cases}\dfrac{b_i}{a_{ih}} & \text{当}\exists j_i=h\text{且}a_{ih}\neq 0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

那么方程(2)的所有解构成解集

$$\mathscr{X}=\bigcup_{g\in G}\{X\,|\,X_g\subseteq X\subseteq \bar{X}\}\ .$$

证(i) 设$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$是方程(2)的一个解.现证$X\in\mathscr{X}$.回顾定理2的必要性部分。我们已找到$g=(j_1,j_2\cdots j_m)\in$ G满足等式

$$a_{ij_i}x_{j_i}=a_{ij_i}\bar{x}_{j_i}=b_i,\qquad i=1,2,\cdots m. \tag{7}$$

首先证明，根据这个g而得的每个x_{gh}是唯一确定的.因为若有$j_i=h$，$a_{ih}\neq 0$，$j_t=h$，$a_{th}\neq 0$，则

$$a_{ij_i}\bar{x}_{j_i}=b_i,\ a_{tj_t}\bar{X}_{j_t}=b_t$$

所以等式

$$\frac{b_i}{a_{ih}}=\frac{b_t}{a_{th}}$$

必成立.

其次，对每个h,先考虑$\exists j_i=h$且$a_{ih}\neq 0$的情况。此时，一方面$x_{gh}=\frac{b_i}{a_{ih}}$。另一方面，由式(7)得

$$x_h=\bar{x}_h=\frac{b_i}{a_{ih}},$$

所以$x_{gh}=x_h$。对其它情况，$x_{gh}=0\leqslant x_h$自动成立。由此可见，在任何情况下均有$x_{gh}\leqslant x_h$。因此$X_g\subseteq X\subseteq\bar{X}$，即$X\in\mathscr{X}$。

(ii) 任取$g=(j_1,j_2,\cdots j_m)\in G\neq\phi$。按规定构造$X_g=(x_{g1},x_{g2},\cdots x_{gn})^T$。不难看出，不等式

$$\bigvee_{h=1}^{n} a_{ih}x_{gh} \geq b_i \qquad i=1,2,\cdots m$$

是正确的。因为当 $b_i=0$时此不等式自动成立；而当 $b_i \neq 0$时，我们由 $a_{ij_i}\bar{X}_{j_i}=b_i$知$a_{ij_i}\neq 0$因此$x_{gj_i}=\dfrac{b_i}{a_{ij_i}}$，于是

$$\bigvee_{h=1}^{n} a_{ih}x_{gh} \geq a_{ij_i}x_{gj_i}=a_{ij_i}\frac{b_i}{a_{ij_i}}=b_i$$

仍然成立。这样便有

$$A\cdot X_g \supseteq B$$

另一方面，对每个 h，当$\exists j_i=h$ 且$a_{ih}\neq 0$时，得到

$$x_{gh}=\frac{b_i}{a_{ih}}=\bar{x}_h,$$

而在其它情况时，

$$x_{gh}=0\leqslant \bar{x}_h$$

因而在任何情况下，永远有 $X_g\subseteq\bar{X}$。
随之得到

$$B\subseteq A\cdot X\subseteq A\cdot\bar{X}=B。$$

故对一切$X_g\subseteq X\subseteq\bar{X}$都有$A\cdot X=B$。这等于说$\mathscr{X}$的每个元 X 都是方程(2)的解。

(i)及(ii)共同说明方程(2)的解集为$\mathscr{X}$。这正是我们所希望的。 □

为方便计，把定理 3 中提到的 X_g 叫做对应于指标 $g\in G$ 的拟极小解。

例1 判别最大—乘积型 Fuzzy 关系方程

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.6 & 0.6 \\ 0.3 & 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

的可解性；计算最大解、极小解；并求方程的解集。

解(i) 比较系数矩阵A的第j列与B，按照

$$\bar{x}_j = \bigwedge_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ij}} \middle| a_{ij} > b_i \right\} \qquad j = 1,2,3,4,$$

计算$\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)^T$。

由于

$$\bar{x}_1 = \wedge \left\{ \frac{4}{5}, \frac{2}{3} \right\} = \frac{2}{3},$$

$$\bar{x}_2 = \bigwedge_{\varphi} = 1,$$

$$\bar{x}_3 = \wedge \left\{ \frac{4}{6}, \frac{2}{3} \right\} = \frac{2}{3},$$

$$\bar{x}_4 = \wedge \left\{ \frac{4}{6}, \frac{2}{3} \right\} = \frac{2}{3},$$

所以$\bar{X} = \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)^T$。

(ii) 按照

$$G_i = \{ j_i \mid a_{ij_i} \bar{x}_{j_i} = b_i \} \qquad i = 1,2,3$$

计算$G = G_1 \times G_2 \times G_3$。

由于

$$G_1 = \{3, 4\},$$

$$G_2=\{1,2,4\},$$
$$G_3=\{3\},$$

所以

$$G=\{(3,1,3),(3,2,3),(3,4,3),$$
$$(4,1,3),(4,2,3),(4,4,3)\}.$$

(iii) 因为$G\neq 0$，根据定理 2 判定方程可解；进而根据定理1知上述$\bar{X}$是最大解。

(iv) 对每个指标$g=(j_1,j_2,j_3)\in G$，按照

$$x_{gh}=\begin{cases}\dfrac{b_i}{a_{ih}} & \text{当}\exists j_i=h\text{且}a_{ih}\neq 0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\quad h=1,2,3,4$$

计算拟极小解$X_g(x_{g1},\ x_{g2},\ x_{g3},\ x_{g4})$。

考察对应于 $g=(3,1,3)$的拟 极 小 解 $X_g=(x_{g1},x_{g2},x_{g3},x_{g4})^T$。由于$j_2=1$且$a_{21}\neq 0$，所以

$$x_{g1}=\frac{b_2}{a_{21}}=\frac{2}{3};$$

由于j_1，j_2，$j_3\neq 2$，所以

$$x_{g2}=0;$$

由于$j_1=3$且$a_{13}\neq 0$，所以

$$x_{g3}=\frac{b_1}{b_{13}}=\frac{2}{3};$$

由于j_1，j_2，$j_3\neq 4$，所以

$$x_{g4}=0.$$

这样，对应于指标 $g=(3,1,3)$的拟极小解为

$$X_{(3,1,3)}=\left(\frac{2}{3},\ 0,\ \frac{2}{3},\ 0\right)^T.$$

同理有

$$X_{(3,2,3)}=\left(0,\ 1,\ \frac{2}{3},\ 0\right)^{T},$$

$$X_{(3,4,3)}=\left(0,\ 0,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)^{T},$$

$$X_{(4,1,3)}=\left(\frac{2}{3},\ 0,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)^{T},$$

$$X_{(4,2,3)}=\left(0,\ 1,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)^{T},$$

$$X_{(4,4,3)}=\left(0,\ 0,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)^{T}.$$

(v) 将所有拟极小解 X_g 两两比较，删去重复的及较大的，便得出方程的所有极小解。

明显地，$X_{(3,1,3)}$，$X_{(3,2,3)}$，$X_{(3,4,3)}$ 是全部极小解，其余均应删去。

(iv) 根据定理 3，按照

$$\mathscr{X}=\bigcup_{g\in G}\{X \mid X_g\subseteq X\subseteq \overline{X}\}$$

写出方程的解集。

于是解集$\mathscr{X}$为

$$\mathscr{X}=\left\{\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ [0,1]\\ \frac{2}{3}\\ \left[0,\frac{2}{3}\right]\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\left[0,\frac{2}{3}\right]\\ 1\\ \frac{2}{3}\\ \left[0,\frac{2}{3}\right]\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\left[0,\frac{2}{3}\right]\\ [0,1]\\ \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}\right\}.$$

为了提高效率，我们把求解最大—乘积型 Fuzzy 关系方程

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

的完整过程浓缩为如下表格作业。

	x_1	x_2	·	·	·	x_n
b_1 b_2 $\vdots$ b_m	表				甲	
$\bar{X}$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	·	·	·	$\bar{x}_n$
X_g	表				乙	
极 小 解						

填表的步骤由(i)到(v)，可以参照例1进行：

(i) 比较 A 的第 j 列与 B，按照

$$x_j = \bigwedge_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ij}} \middle| a_{ij} > b_i \right\} \qquad j = 1, 2, \cdots n$$

求出 $\bar{X}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots\bar{x}_n)^T$.

(ii) 比较 A 的第 i 行与 b_i。若 $b_{ij}\bar{x}_j=b_i$，则在表甲的 i 行 j 列位置上填写 $\bar{x}_j$，否则让位置留空。

(iii) 方程可解的充分必要条件是表甲的各列非空。

(iv) 从表甲的第一行到第 m 行各任取一元按列记到表乙中，并在表乙的其余空白位置添上 0 即得一拟极小解。

(v) 在表乙中删去重复的、较大的拟极小解后，得到方程的所有极小解。

关于例 1 的表格见下，在表格右边特意增添说明栏，供对照用。

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.6 & 0.6 \\ 0.3 & 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	说明
0.4			$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\longleftrightarrow G_1=\{3,\ 4\}$
0.2	$\frac{2}{3}$	1		$\frac{2}{3}$	$\longleftrightarrow G_2=\{1,2,4\}$
0.2			$\frac{2}{3}$		$\longleftrightarrow G_3=\{3\}$
$\bar{X}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	

	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	$\longleftrightarrow g=(3,1,3)$
	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$\longleftrightarrow g=(3,2,3)$
	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\longleftrightarrow g=(3,4,3)$
X_g	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\longleftrightarrow g=(4,1,3)$
	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\longleftrightarrow g=(4,2,3)$
	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\longleftrightarrow g=(4,4,3)$
极小解	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	
	0	1	$\frac{2}{3}$	0	
	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	

§4.7 Fuzzy 综合评判

一、综合评判空间

Fuzzy 综合评判是应用广泛的一种模糊数学方法。在这里，评判的意思是按照指定的条件对事物的优劣进行评比、判定；综合是指评判条件包含多个因素。我们所要处理的主要问题是，对受到多个因素影响的事物作出全面评价，务求

按照指定的评判条件对每个对象赋予一个实数值作为综评指标，使得综评指标的大小反映全面评价的高低。

已知评判对象集$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$。在进行综合评判的过程中，首先以指定的评判条件为准绳，选择合适的因素组成因素集$U=\{u_1,u_2,\cdots u_n\}$。U必须如实反映评判条件的各个侧面。在此基础上对每个对象作单因素评判，即对序偶(x_i, u_j)赋以指标$r_{ij}\in[0,1]$，r_{ij}的大小是衡量对象x_i适合因素u_j的尺度。这些单因素指标构成指标矩阵$R\in\mathscr{F}(X\times U)$，

$$R=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{pmatrix}$$

指标矩阵的第i个行向量$(r_{i1},r_{i2},\cdots r_{in})\in[0,1]^n$也可以视为$U$上的一个Fuzzy集。它刻划了对象$x_i$的特性。

其次，确定综评函数$f:[0,1]^n\to\mathbf{R}$。记$E(x_i)=f(r_{i1}, r_{i2}\cdots, r_{in})$，$i=1,2,\cdots,m$。$E(x_i)$便是对象$x_i$的综评指标。$E(x_1)$，$E(x_2),\cdots,E(x_m)$由大到小排列，即可决定对象$x_1,\cdots,x_m$的优劣。

给定对象集X，因素集U以及指标矩阵R，称$S=(X, U, R)$为综合评判空间。

综合评判问题的焦点是：已知综合评判空间$S=(X,U, R)$，怎样计算对象x_i的综评指标？也就是说，利用什么样的综评函数

$$f:[0,1]^n\to\mathbf{R},$$

使得函数值$f(r_{i1},r_{i2},\cdots,r_{in})$能够恰如其份地表征对象$x_i$的优劣。在未引进具体的综评函数之前，让我们先对综评函数

作一般性说明。普遍而言，综评函数f总具有这样那样的性质，例如

(1) 正则性：$f(0,0,\cdots,0)=0$；

(2) 递增性：$(z_1',z_2',\cdots,z_n')\leqslant(z_1,z_2,\cdots,z_n)$时，
$$f(z_1',z_2',\cdots,z_n')\leqslant f(z_1,z_2,\cdots,z_n);$$

(3) 连续性：
$$\lim_{(z_1',z_2',\cdots,z_n')\to(z_1,z_2,\cdots,z_n)} f(z_1',z_2'\cdots z_n') = f(z_1,z_2,\cdots z_n);$$

(4) 可加性：
$$f(z_1+z_1',z_2+z_2',\cdots,z_n+z_n') = f(z_1,z_2,\cdots,z_n)+f(z_1',z_2',\cdots,z_n');$$

(5) 可乘性：
$$f(z_1z_1',z_2z_2',\cdots,z_nz_n') = f(z_1,z_2,\cdots,z_n)f(z_1',z_2',\cdots,z_n');$$

(6) 择大性：
$$f(z_1\vee z_1',z_2\vee z_2',\cdots,z_n\vee z_n'); = f(z_1,z_2,\cdots,z_n)\vee f(z_1',z_2',\cdots z_n')$$

(7) 择小性：
$$f(z_1\wedge z_1',z_2\wedge z_2',\cdots,z_n\wedge z_n') = f(z_1,z_2,\cdots,z_n)\wedge f(z_1',z_2',\cdots,z_n');$$

等等。这些性质反映了单因素评判与综合评判之间的联系。例如正则性规定每个单因素指标为0时，综评指标也为0；递增性要求综评指标随着单因素指标的增加而提高；连续性保证综评指标不因单因素指标的微小改动而突然变化。

二、 几种常用的综评函数

着手引进几种常用的综评函数。

引理1 设函数$\varphi:[0,1]\longrightarrow[0,1]$具有正则性、递增性、连续性及幂等性
$$\varphi(\varphi(x))=\varphi(x).$$

则$\varphi(x)=a\wedge x$，其中$a=\varphi(1)$。

证 因为函数φ具有正则性、递增性及连续性，所以φ的射程是$[0,a]$，其中$a=\varphi(1)$。

对每个$x\in[0,a)$，存在$y\in[0,1]$使$x=\varphi(y)\leqslant a$。于是

$$\varphi(x)=\varphi(\varphi(y))=\varphi(y)=a\wedge\varphi(y)=a\wedge x.$$

对每个$x\in[a,1]$，我们有

$$a=\varphi(1)=\varphi(\varphi(1))=\varphi(a)\leqslant\varphi(x)$$
$$\leqslant\varphi(1)=a.$$

所以仍然得出

$$\varphi(x)=a=a\wedge x.$$ □

定理1 设综评函数$f:[0,1]^n\to[0,1]$具有正则性、连续性、择大性，且满足条件

$$g_j(g_j(z_j))=g_j(z_j),$$

其中

$$g_j(z_j)=f(0,\cdots,0,z_j,0,\cdots,0),\quad j=1,2,\cdots,n.$$

则必存在常数$a_1,a_2,\cdots,a_n\in[0,1]$，使

$$f(z_1,z_2,\cdots,z_n)=\bigvee_{j=1}^{n}(a_j\wedge z_j).$$

证 已知f具有择大性，

$$f(z_1\vee z_1',z_2\vee z_2',\cdots,z_n\vee z_n')$$
$$=f(z_1,z_2,\cdots,z_n)\vee f(z_1',z_2',\cdots,z_n')$$

利用这个等式容易看出f具有递增性。

不仅如此，因为

$$f(z_1,z_2,\cdots,z_n)=f(z_1\vee 0,0\vee z_2,\cdots,0\vee z_n),$$

所以

$$f(z_1,z_2,\cdots,z_n)=f(z_1,0,\cdots,0)\vee f(0,z_2,\cdots,z_n)$$

$$= g_1(z_1)\wedge f(0,z_2,\cdots,z_n).$$

又因为

$$f(0,z_2,\cdots z_n)=f(0\vee 0,z_2\vee 0,0\vee z_3,\cdots,0\vee z_n)$$

$$=f(0,z_2,0,\cdots,0)\vee f(0,0,z_3,\cdots,z_n)$$

$$=g_2(z_2)\vee f(0,0,z_3,\cdots,z_n)$$

所以

$$f(z_1,z_2,\cdots,z_n)=g_1(z_1)\vee g_2(z_2)\vee f(0,0,z_3,\cdots,z_n).$$

如此类推，得到

$$f(z_1,z_2,\cdots,z_n)=g_1(z_1)\vee g_2(z_2)\vee\cdots\vee g_n(z_n).$$

函数 f 的正则性、递增性、连续性显然都遗传给函数 g_j，另外已知 g_j 还具有幂等性。由引理1，有

$$g_j(z_j)=a_j\wedge z_j \qquad 其中a_j=g_j(1)\in[0,1].$$

因此

$$f(z_1,z_2,\cdots,z_n)=\bigvee_{j=1}^{n}g_j(z_j)=\bigvee_{j=1}^{n}(a_j\wedge z_j).$$ □

引理2 设函数$\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$具有递增性及可加性，则

$$\varphi(x)=ax$$

其中$a=\varphi(1)\geqslant 0$.

证 任取正整数m及n，设$m\leqslant n$。利用φ的可加性，易得

$$\varphi\left(\frac{m}{n}\right)=m\varphi\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{m}{n}n\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{m}{n}\varphi(1)=a\frac{m}{n},$$

其中$a=\varphi(1)$。这样，当有理数$r\in(0,1]$时有$\varphi(r)=ar$。显

然此等式也适用于$r=0$。原因是由φ的可加性直接推出$\varphi(0)=\varphi(0+0)=\varphi(0)+\varphi(0)$即$\varphi(0)=0$。

进一步设ξ为$(0,1)$内的任意实数，取有理数列α_n，β_n使得$0\leqslant\alpha_n\leqslant\xi\leqslant\beta_n\leqslant 1$且$\alpha_n\to\xi$，$\beta_n\to\xi$。根据函数$\varphi$的递增性，有$\varphi(0)\leqslant\varphi(\alpha_n)\leqslant\varphi(\xi)\leqslant\varphi(\beta_n)\leqslant\varphi(1)$，即$0\leqslant a\alpha_n\leqslant\varphi(\xi)\leqslant a\beta_n\leqslant a$。令$n\to+\infty$，得$0\leqslant a\xi\leqslant\varphi(\xi)\leqslant a\xi\leqslant a$。故$\varphi(\xi)=a\xi$，$a=\varphi(1)\geqslant 0$。

因此，$\forall x\in[0,1]$均有$\varphi(x)=ax$，$a=\varphi(1)\geqslant 0$。 □

定理2 设综评函数$f:[0,1]^n\to[0,1]$具有择大性且满足条件

$$g_j(z_j+z_j')=g_j(z_j)+g_j(z_j')$$

其中

$$g_j(z_j)=f(0,\cdots,0,z_j,0,\cdots,0),\qquad j=1,2,\cdots,n.$$

则存在常数$a_1,a_2,\cdots,a_n\in[0,1]$，使

$$f(z_1,z_2,\cdots,z_n)=\bigvee_{j=1}^{n}a_jz_j.$$

证 重复定理1中的推理，由f的择大性不仅得到f的递增性，还可以得到等式

$$f(z_1,z_2,\cdots,z_n)=g_1(z_1)\vee g_2(z_2)\vee\cdots\vee g_n(z_n),$$

其中

$$g_j(z_j)=f(0,\cdots,0,z_j,0,\cdots,0),\quad j=1,2,\cdots,n.$$

函数f的递增性显然遗传给函数g_j；另外已知g_j还具有可加性。由引理2，有

$$g_j(z_j)=a_jz_j\qquad 其中 a_j=g_j(1)\in[0,1].$$

因此

$$f(z_1,z_2,\cdots,z_n)=\bigvee_{j=1}^{n}g_j(z_j)=\bigvee_{j=1}^{n}a_jz_j, \qquad □$$

定理3　设综评函数f：$[0,1]^n \to R$且有递增性及可加性。则存在着非负常数$a_1,a_2\cdots,a_n$使

$$f(z_1,z_2,\cdots,z_n)=\sum_{j=1}^{n}a_jz_j$$

证　利用f的可加性，不难推出

$$f(z_1,z_2\cdots,z_n)=f(z_1,0,\cdots,0)+f(0,z_2,0,\cdots,0,)+\cdots+f(0,\cdots,0,z_n)$$

记　　$g_j(z_j)=f(0,\cdots,0,z_j,0,\cdots,0)$，　$j=1,2,\cdots,n$。

f的递增性及可加性直接保证g_j具有递增性及可加性。根据引理2，得到

$$g_j(z_j)=a_jz_j \qquad 其中a_j=g_j(1)\geqslant 0\cdot$$

因此，

$$f(z_1,z_2,\cdots,z_n)=\sum_{j=1}^{n}g_i(z_i)=\sum_{j=1}^{n}a_jz_j。$$ □

引理3　设函数$\varphi:(-\infty,0,]\to R$具有递增性及可加性，则

$$\varphi(x)=ax,$$

其中$a=-\varphi(-1)\geqslant 0$

证　任取正整数m及n，利用φ的可加性得到

$$\varphi\left(-\frac{m}{n}\right)=m\varphi\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{m}{n}n\varphi\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{m}{n}\varphi(-1)$$

$$=a\left(-\frac{n}{m}\right)$$

其中$a=-\varphi(-1)$。这样，当有理数$r\in(-\infty,0,)$时有$\varphi(r)=ar$。此等式显然也适用于$r=0$，原因是由φ的可加性直接

推出$\varphi(0)=0$。

进一步设ξ为任意负实数。取负有理数列α_n，β_n使得$\alpha_n\leqslant\xi\leqslant\beta_n<0$，且$\alpha_n\to\xi$，$\beta_n\to\xi$。根据$\varphi$的递增性，我们有$\varphi(\alpha_n)\leqslant\varphi(\xi)\leqslant\varphi(\beta_n)\leqslant\varphi(0)$，即$a\alpha_n\leqslant\varphi(\xi)\leqslant a\beta_n\leqslant 0$。令$n\to+\infty$，得$a\xi\leqslant\varphi(\xi)\leqslant a\xi\leqslant 0$。从而$\varphi(\xi)=a\xi$并且$a\geqslant 0$

因此，$\forall x\in(-\infty,0]$均有

$$\varphi(x)=ax,\quad a=-\varphi(-1)\geqslant 0,$$ □

定理4 设函数$\varphi:[0,1]\to[0,1]$具有连续性及可乘性，且$\varphi(0)=0$，$\varphi(1)=1$。则

$$\varphi(x)=x^a$$

其中常数$a=-\ln\varphi(e^{-1})>0$。

证(1) 证$x\neq 0$时$\varphi(x)\neq 0$。

用反证法。假如存在$x_0\in(0,1)$使$\varphi(x_0)=0$。于是由

$$0=\varphi(x_0)=\varphi(x_0^{\frac{1}{2}}x_0^{\frac{1}{2}})=\varphi(x_0^{\frac{1}{2}})\varphi(x_0^{\frac{1}{2}})$$

得$\varphi(x_0^{\frac{1}{2}})=0$。进一步由

$$0=\varphi(x_0^{\frac{1}{2}})=\varphi(x_0^{\frac{1}{4}}x_0^{\frac{1}{4}})=\varphi(x_0^{\frac{1}{4}})\varphi(x_0^{\frac{1}{4}})$$

得$\varphi(x_0^{\frac{1}{4}})=0$。如此类推。从而在$(0,1)$内存在着严格增加且收敛于1的数列$x_0$，$x_0^{\frac{1}{2}}$，$x_0^{\frac{1}{4}}$，…，$x_0^{\frac{1}{2^n}}$，…使得$\varphi(x_0^{\frac{1}{2^n}})=0$。根据$\varphi$在$x=1$的连续性，我们有

$$\varphi(1)=\lim_{n\to+\infty}(x_0^{\frac{1}{2^n}})=0,$$

这与$\varphi(1)=1$矛盾。

(2) 证$x\neq 1$时$\varphi(x)\neq 1$。

反证法．假设存在 $x_0\in(0,1)$ 使 $\varphi(x_0)=1$．那么运用(1)中的手法，在(0，1)内找到严格减少且收敛于0的数列

$x_0, x_0^2, x_0^4, \cdots, x_0^{2^n}\cdots$，使得 $\varphi(x_0^{2^n})=(\varphi(x_0))^{2^n}=1$．根据$\varphi$在

$x=0$ 的连续性，我们有

$$\varphi(0)=\lim_{n\to+\infty}\varphi(x_0^{2^n})=1.$$

这与$\varphi(0)=0$矛盾。

(3) 证$\varphi(x)$在[0,1]上严格增加。

任取$x_1, x_2\in[0,1]$．不失一般性，无妨设$0<x_1<x_2<1$．这时

$$\varphi(x_1)=\varphi\left(\frac{x_1}{x_2}x_2\right)=\varphi\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\varphi(x_2).$$

由(1)及(2)，$0<\varphi\left(\frac{x_1}{x_2}\right)<1$。所以$\varphi(x_1)<\varphi(x_2)$可见$\varphi(x)$在[0,1]上的确严格增加。

(4) 引进复合函数

$\psi:(\infty,0]\longrightarrow\mathbf{R}$

$\psi(\xi)=\ln\varphi(e^\xi)$

由(3)知ψ严格增加．另外ψ满足可加性：

$\psi(\xi+\eta)=\ln\varphi(e^{\xi+\eta})=\ln\varphi(e^\xi)+\ln\varphi(e^\eta)$

即

$$\psi(\xi+\eta)=\psi(\xi)+\psi(\eta).$$

根据引3，$\psi(\xi)=a\xi$，其中$a=-\psi(-1)$。于是

$$\varphi(e^\xi)=e^{\psi(\xi)}=e^{a\xi}=(e^\xi)^a.$$

从而$\varphi(x)x^a$·此外$a=-\psi(-1)=-\ln\varphi(e^{-1})>0$。

正是我们所需要的。 □

定理4 设综评函数$f:[0,1]^n\to[0,1]$具有连续性、择小性且满足条件

$$h_j(z_jz_j')=h_j(z_j)h_j(z_j'),$$

$$h_j(0)=0,\qquad h_j(1)=1;$$

其中

$$h_j(z_j)=f(1,\cdots,1,z_j,1\cdots,1),\quad j=1,2\cdots,n$$

则存在着正常数$a_1,a_2\cdots,a_n$使

$$f(z_1,z_2,\cdots,z_n)=\bigwedge_{j=1}^{n}z_j^{a_j}$$

证 利用f的择小性，不难推出

$$\begin{aligned}f(z_1,z_2,\cdots,z_n)&=f(z_1,1,\cdots,1)\wedge f(1,z_2,1\cdots,1)\\&\quad\wedge\cdots\wedge f(1,\cdots,1,z_n)\\&=\bigwedge_{j=1}^{n}h_j(z_j)\end{aligned}$$

其中

$$h_j(z_j)=f(1,\cdots,1,z_j,1,\cdots,1)\quad j=1,2\cdots,n.$$

因为f是连续的，所以每个h_j都是连续的。这样一来，h_j适合引理4的全部条件，于是$h_j(z_j)=z_j^{a_j}$

$a_j=-\ln h_j(e^{-1})>0$。代入上式便得到

$$f(z_1,z_2,\cdots,z_n)=\bigwedge_{j=1}^{n}h({}_jz_j)=\bigwedge_{j=1}^{n}z_j^{a_j}.$$

这正是所需要的结果。 □

至此为止，根据综评函数f所具有的附加性质，我们已

经获得了Fuzzy综合评判的四个模型。

模型Ⅰ：综合函数$f_1(z_1,z_2,\cdots z_n)=\bigvee_{j=1}^{n}(a_j\wedge z_j),a_j\in[0,1]$；

模型Ⅱ：综评函数$f_2(z_1,z_2,\cdots,z_n)=\bigvee_{j=1}^{n}b_jz_j,\ b_j\in[0,1]$；

模型Ⅲ：综评函数$f_3(z_1,z_2,\cdots,z_n)=\sum_{j=1}^{n}c_jz_j,\ c_j\geqslant 0$；

模型Ⅳ：综评函数$f_4(z_1,z_2,\cdots,z_n)=\bigwedge_{j=1}^{n}z_j^{d_j},d_j>0$；

为了阐明这些模型与Fuzzy集合运算之间的联系，对于已知的综合评判空间$S=(X,U,R)$，令

$$A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\\vdots\\d_n\end{pmatrix}.$$

对象$x_i\in X$的综评指标$E(x_i)=f(r_{i1},r_{i2},\cdots,r_{in})$。利用这四个模型得到

$$\begin{pmatrix}E_1\ (x_1)\\E_1\ (x_2)\\\vdots\\E_1\ x_m)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_{11}&r_{12}&\cdots&r_{1n}\\r_{21}&r_{22}&\cdots&r_{2n}\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\r_{m1}&r_{m2}&\cdots&r_{mn}\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=R\circ A^*,$$

$$\begin{pmatrix} E_2(x_1) \\ E_2(x_2) \\ \cdots \\ E_2(x_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} = B \cdot A,$$

$$\begin{pmatrix} E_3(x_1) \\ E_3(x_2) \\ \cdots \\ E_3(x_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = RC,$$

$$\begin{pmatrix} E_4(x_1) \\ E_4(x_2) \\ \cdots \\ E_4(x_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{pmatrix} \overset{\frown}{*} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = R \overset{\frown}{*} D,$$

统一起来写成

$$E = R \overset{\circ}{*} W$$

也就是

$$\begin{pmatrix} E(x_1) \\ E(x_2) \\ \vdots \\ E(x_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{pmatrix} \overset{\circ}{*} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (r_{11} \overset{\bullet}{*} w_1) \overset{+}{*} (r_{12} \overset{\bullet}{*} w_2) \overset{+}{*} \cdots \overset{+}{*} (r_{1n} \overset{\bullet}{*} w_n) \\ (r_{21} \overset{\bullet}{*} w_1) \overset{+}{*} (r_{22} \overset{\bullet}{*} w_2) \overset{+}{*} \cdots \overset{+}{*} (r_{2n} \overset{\bullet}{*} w_n) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (r_{m1} \overset{\bullet}{*} w_1) \overset{+}{*} (r_{m2} \overset{\bullet}{*} w_2) \overset{+}{*} \cdots \overset{+}{*} (r_{mn} \overset{\bullet}{*} w_n) \end{pmatrix},$$

其中$\overset{+}{*}$，$\overset{\cdot}{*}$是两个算子，对模型Ⅰ来说代表∨，∧；对模型Ⅱ来说代表∨，·；对模型Ⅲ来说代表＋，·；对模型Ⅳ来说代表∧，$\overset{\wedge}{*}$（$\overset{\wedge}{*}$表示乘幂运算）．当然还可以采用其它形式的运算．因此从原则上看，Fuzzy 综合评判的数学模型是举不胜举的．

三、数学模型的实质

下面谈谈这四个模型的涵义

在模型Ⅰ中，对象x_i对单因素u_j的指标r_{ij}首先被修正为

$$r^*_{ij} = r_{ij} \overset{\cdot}{*} w_j = a_j \wedge r_{ij}.$$

这便清楚表明，从单因数指标出发作多因素处理时，a_j成为r_{ij}^*的上限。这意味着a_j具有制约因素u_j的功能．其次，令运算$\overset{+}{*}$为∨的用意十分明显，那就是只考虑使r_{ij}^*达到最大值的那个因素而忽略其它因素的影响．由此可见，模型Ⅰ是一种制约性主因素突出型的综合评判．模型Ⅰ平常简写作$M(\vee,\wedge)$

在模型Ⅱ中，对象x_i对单因素u_j的指标r_{ij}首先被修正为

$$r^*_{ij} = r_{ij} \overset{\cdot}{*} w_j = b_j\, r_{ij} .$$

也就是说用一个介于0与1之间的系数b_j与r_{ij}的乘积代替r_{ij}．因此b_j是从单因素指标出发作多因素处理时的修正系数．换言之，b_j同样具有制约因素u_j的功能．其次，由于令$\overset{+}{*}$为∨所以模型Ⅱ也是一种制约性主因素突出型的综合评判．模型Ⅱ平常简写作$M(\vee,\cdot)$．

模型Ⅲ简写作$M(+,\cdot)$，它令$\overset{\cdot}{*}$为普通乘法，令$\overset{+}{*}$为普通加法．等式

$$E_3(x_i)=\sum_{j=1}^{n}=r_{ij}c_j$$

明白地指出，对象x_i的总评指标$E_3(x_i)$等于所有单因素 指 标r_{ij}的加权平均值，c_j便是单因素u_j的权数。所以$M(+,\ \cdot)$是加权平均型的综合评判。不失一般性，还可规定$c_1+c_2+\cdots+c_n=1$。

模型Ⅳ简写作$M(\wedge,\ \hat{\cdot})$。在从单因素指标出发 作多因素处理时，首先把单因素指标r_{ij}修正为

$$r_{ij}^*=r_{ij}^{d_j}$$

这意味着d_j具有约制因素u_j的功能。这个模型的最大特点 是令对象x_i的综评指标等于所有r_{ij}^*中最小值$\bigwedge_{j=1}^{n}r_{ij}^{d_j}$由此可见，为了有效地提高对象$x_i$的综评指标，务必全面改善所 有单因素指标才能达到目的。所以这是一种制约性全面促 进 型 综合评判。

若各因素在综合评判中的地位几乎对等，则可取$a_j=b_j=d_j=1$，$c_j=\frac{1}{n}$，此时上述四个综评函数简化为

模型Ⅰ：　$f_1(z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n)=\bigvee_{j=1}^{n}z_j$；

模型Ⅱ：　$f_2(z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n)=\bigvee_{j=1}^{n}z_j$；

模型Ⅲ：　$f_3(z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}z_j$；

模型Ⅳ： $f_4(z_1, z_2, \cdots, z_n)=\bigwedge_{j=1}^{n} z_j$.

模型Ⅰ与模型Ⅱ完全一致．

在$E=R\circ W$中，已知R及W，求E的问题称为Fuzzy综合评判的正问题；已知R及E，求W的问题称为Fuzzy综合评判的逆问题。正问题可由计算综评指标来解决，逆问题则同各种类型的Fuzzy方程的解有密切联系，非常明显，模型Ⅰ的逆问题转化为最大—最小型Fuzzy关系方程，模型Ⅱ的逆问题则同等于最大—乘积型Fuzzy关系方程．

四、二级综合评判

在Fuzzy综合评判中，除了有特殊要求的情况不说之外，如果只使用以上四个模型中的任何一个，则易犯片面性的毛病．我们曾经阐明，模型$M(\vee,\wedge)$或$M(\vee,\cdot)$单纯从最强的单因素指标着眼而忽略其它因素的影响．模型$M(\wedge,\hat{\cdot})$正好相反，专门挑选最弱的单因素指标。模型$M(+,\cdot)$虽说已全面考虑所有因素的作用，但加权平均算法仍然难于刻划对象的特征．为了较全面地改善综评结果，可在对每个对象$x_i\in X$算出综评指标$E_1(x_i)$，$E_3(x_i)$，$E_4(x_i)$（或算出$E_2(x_i)$ $E_3(x_i)$，$E_4(x_i)$）之后，再来一次Fuzzy综合评判，即进行所谓二级综合评判．在二级综合评判中，视E_1，E_3，E_4（或E_2，E_3，E_4）为因素集的元素。具体步骤如下．

已知综合评判空间$S=(X,U,R)$．按照模型Ⅰ，Ⅲ，Ⅳ计算综评指标

$$E_1(x_i)=\bigvee_{j=1}^{n}(a_j\wedge r_{ij})\in[0,1],$$

$$E_3(x_i)=\sum_{j=1}^{n}c_j\ r_{ij}\in[0,1],$$

$$E_4(x_i)=\bigwedge_{j=1}^{n}r_{ij}^{d_j}\in[0,1].$$

令$U'=\{E_1,E_3,E_4\}$，$R'\in\mathscr{F}(X\times U')$

$$R'=\begin{pmatrix} E_1(x_1) & E_3(x_1) & E_4(x_1)\\ E_1(x_2) & E_3(x_2) & E_4(x_2)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ E_1(x_m) & E_3(x_m) & E_4(x_m)\end{pmatrix}.$$

于是得到一个新的综合评判空间$S'=(X,U',R')$。对S'作综合评判时，仍根据实际需要选择综评函数$f':[0,1]^3\to\mathbf{R}$，例如采用算术平均算法

$$f'(z_1,z_2,z_3)=\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$$

计算$E'(x_i)=f'(E_1(x_i),E_3(x_i),E_4(x_i))=\frac{1}{3}(E_1(x_i)+E_3(x_i)+E_4(x_i))$，$i=1,2,\cdots,m$，称$E'(x_i)$为对象$x_i$的二级综评指标。最后按$E'(x_i)$的大小确定对象的优劣。

第五章　扩展原则与Fuzzy实数

§ 5.1　扩展原则

一、 普通集合变换

在§1.2中，我们讨论过源点在映射下的像点以及像点在映射下的源点问题.

给定一个从 U 到 V 的映射

$$f:U\to V,\quad u\longmapsto f(u)\ .$$

设$A\in\mathscr{P}(U)$，$B\in\mathscr{P}(V)$.令

$$f^{(1)}(A)=\{v\,|\,v\in V,\ \exists\ u\in A使v=f(u)\}.$$

$$f^{(2)}(B)=\{u\,|\,u\in U,\ f(u)\in B\}.$$

我们把映射

$$f^{(1)}:\mathscr{P}(U)\to\mathscr{P}(V),\quad A\longmapsto f^{(1)}(A)$$

叫做从映射 f 扩展的正向普通集合变换；把映射

$$f^{(2)}:\mathscr{P}(V)\to\mathscr{P}(U),\quad B\longmapsto f^{(2)}(B)$$

叫做从映射f的扩展的反向普通集合变换.

很明显，$f^{(1)}(U)$与$f^{(2)}(V)$ 分别就是映射f的射程与映射f的始集. 为简便计，今后把$f^{(1)}$及$f^{(2)}$分别记着f及f^{-}，即

$$f:\mathscr{P}(U)\to\mathscr{P}(V),\quad A\longmapsto f(A),$$

$$f(A)=\{v\,|\,v\in V,\exists\ u\in A使v=f(u)\};$$

$$f^{-1}:\mathscr{P}(V)\to\mathscr{P}(U),\quad B\longmapsto f^{-1}(B),$$

$$f^{-1}(B)=\{u\,|\,u\in U,\ f(u)\in B\}\ .$$

$f(A)$叫做集A的像集，$f^{-1}(B)$叫做集B的源集. 图1及图2分别给出源集与像集的直观解释.

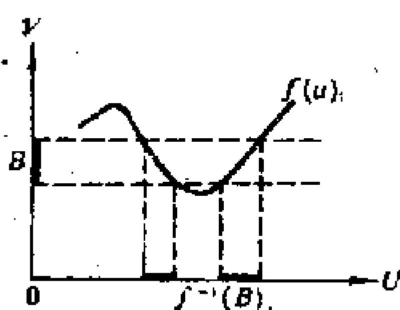


图1

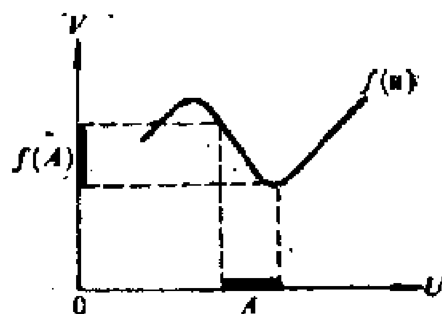


图2

值得留意，正、反向普通集合变换都由给定的映射完全确定；而且，采用f^{-1}作为反向普通集合变换的简写，丝毫不暗示给定的映射

$f:U\to V$是可逆映射.

对于V的单元素子集$B=\{v\}$，约定把$f^{-1}(\{v\})$简写为$f^{-1}(v)$.

定理1 给定映射$f:U\to V$. 则从f扩展的普通集合变换具有以下性质.

(1) $A_1\subseteq A_2 \Longrightarrow f(A_1)\subseteq f(A_2)$;

(2) $B_1\subseteq B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1)\subseteq f^{-1}(B_2)$;

(3) $f(\bigcup\limits_{t\in T}A_t)=\bigcup\limits_{t\in T}f(A_t)$;

(4) $f(\bigcap\limits_{t\in T}A_t)\subseteq\bigcap\limits_{t\in T}f(A_t)$，且当映射$f$为单射时，等号成立；

(5) $f(A^c)\supseteq f(X)\setminus f(A)$，且当映射$f$为单射时，等号成立；

(6) $f^{-1}(\bigcup\limits_{t\in T}B_t)=\bigcup\limits_{t\in T}f^{-1}(B_t)$;

(7) $f^{-1}(\bigcap_{t\in T} B_t)=\bigcap_{t\in T} f^{-1}(B_t)$;

(8) $(f^{-1}(B))^c=f^{-1}(B^c)$;

(9) $f(A)(v)=\bigvee_{u\in f^{-1}(v)} A(u)$,

其中当$f^{-1}(v)=\phi$时，约定 $\bigvee_{u\in\phi} A(u)=0$;

(10) $f^{-1}(B)(u)=B(f(u))$.

证 (1) 设 $A_1\subseteq A_2$。于是

$$f(A_1)=\{v\mid v\in V,\ \exists\ u\in A_1使v=f(u)\}$$

$$\subseteq\{v\mid v\in V,\ \exists\ u\in A_2使v=f(u)\}$$

$$=f(A_2).$$

(4) 因为对每个 $t\in T$ 都有 $\bigcap_{t\in T} A_t\subseteq A_t$，于是根据 (1) 得

$$f(\bigcap_{t\in T} A_t)\subseteq f(A_t),\qquad \forall t\in T.$$

从而

$$f(\bigcap_{t\in T} A_t)\subseteq \bigcap_{t\in T} f(A_t).$$

还要证明单射f能使等号成立。任取 $v\in \bigcap_{t\in T} f(A_t)$. 于是对每个 $t\in T$，有 $v\in f(A_t)$；即对每个 $t\in T$，$\exists\ u_t\in A_t$ 使 $v=f(u_t)$. 因为 f 是单射，所以全部 u_t 都相同；把这些相同的 u_t 记为 u. 于是对每个 $t\in T$，$\exists\ u\in A_t$ 使 $v=f(u)$. 由此 $u\in \bigcap_{t\in T} A_t$，故 $v\in f(\bigcap_{t\in T} A_t)$. 从而

$$\bigcap_{t\in T} f(A_t)\subseteq f(\bigcap_{t\in T} A_t).$$

这就是说，等号的确成立.

（5） 任取 $v\in f(U)\setminus f(A)$

$\Longrightarrow v\in f(U)$且$v\notin f(A)$

$\Longrightarrow\exists\ u\in U$使$v=f(u)$且$u\notin A$

$\Longrightarrow v\in f(A^c)$

因此

$$f(U)\setminus f(A)\subseteq f(A^c)\ .$$

还须证明单射f能使等号成立. 设$v\in f(A^c)$. 于是$\exists\ u\in A^c$使$v=f(u)$，即$\exists\ u\in U$且$u\notin A$使$v=f(u)$. 可以断言$v\notin f(A)$. 因为假如$v\in f(A)$的话，则$\exists\ a\in A$使$v=f(a)$. 由此$f(u)=f(a)$。根据映射f的单性得$u=a$。于是$u\in A$，出现矛盾. 这样一来，我们有

$$v\in f(U)\setminus f(A).$$

可见

$$f(A^c)\subseteq f(U)\setminus f(A).$$

这就是说，等号的确成立.

（9） 设$f(A)(v)=1$

$\Longrightarrow v\in f(A)$

$\Longrightarrow\exists\ a\in A$使$v=f(a)$

$\Longrightarrow\exists\ a\in f^{-1}(v)$使$A(a)=1$

$\Longrightarrow\bigvee_{u\in f^{-1}(v)} A(u)\geqslant A(a)=1$

所以 $$\bigvee_{u\in f^{-1}(v)} A(u)=1.$$

另设 $f(A)(v)=0$

$\Longrightarrow v\notin f(A)$

$$\Longrightarrow f^{-1}(v)\cap A=\phi$$

$$\Longrightarrow \forall u\in f^{-1}(v)\text{必有}A(u)=0$$

所以

$$\bigvee_{u\in f^{-1}(v)} A(u)=0.$$

由此可见

$$f(A)(v)=\bigvee_{u\in f^{-1}(v)} A(u).$$

(10) 对每个$u\in U$，$u\in f^{-1}(B)$的充分必要条件是$f(u)\in B$；换言之，对每个$u\in U$，$f^{-1}(B)(u)=1$的充分必要条件是$B(f(u))=1$. 因此

$$f^{-1}(B)(u)=B(f(u)).$$

用同样方法证明 (2)，(3)，(6)，(7)，(8). □

二、 Fuzzy集合变换

从以上讨论联想到这样的问题是很自然的：已知映射

$$f: U\to V,$$

对于Fuzzy集合$A\in\mathscr{F}(U)$，它在映射f下的像集应当是什么？对于Fuzzy集合$B\in\mathscr{F}(V)$，它在映射f下的源集又应当是什么？换句话说，从U到V的映射f应当怎样扩展到$\mathscr{F}(U)$与$\mathscr{F}(V)$之间去？

扎德提出如下的扩展原则

定义1 (扩展原则) 给定映射

$$f: U\to V,$$

又$A\in\mathscr{F}(U)$、$B\in\mathscr{F}(V)$. 我们把映射

$$f:\mathscr{F}(U)\to\mathscr{F}(V),\quad A\longmapsto f(A),$$

叫做从映射f扩展的正向 Fuzzy 集合变换；把映射

$$f^{-1}:\mathscr{F}(V)\to\mathscr{F}(U),\qquad B\longmapsto f^{-1}(B)$$

叫做从映射f扩展的反向Fuzzy集合变换；$f(\underset{\sim}{A})$，$f^{-1}(\underset{\sim}{B})$的隶属函数规定为

$$f(\underset{\sim}{A})(v)=\bigvee_{u\in f^{-1}(v)}\underset{\sim}{A}(u),$$

$$f^{-1}(\underset{\sim}{B})(u)=\underset{\sim}{B}(f(u)).$$

正向 Fuzzy 集合变换通常简称 Fuzzy 变换，反向 Fuzzy集合变换简称 Fuzzy 反变换.

例1 给定从$U=\{1, 2, \cdots, 6\}$到$V=\{a, b, c, d\}$的映射 $f:U\to V$ 如下

$$f(u)=\begin{cases} a & u=1,\ 2,\ 3 \\ b & u=4,\ 5 \\ c & u=6 \end{cases}.$$

设$\underset{\sim}{A}=\frac{1}{1}+\frac{0.2}{3}+\frac{0.1}{5}+\frac{0.9}{6}$. 由扩展原则

$$\begin{aligned} f(\underset{\sim}{A})(a) &= \bigvee_{u\in f^{-1}(a)}\underset{\sim}{A}(u) \\ &= \vee\{\underset{\sim}{A}(1),\ \underset{\sim}{A}(2),\ \underset{\sim}{A}(3)\}=1 \end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned} f(\underset{\sim}{A})(b) &= \bigvee_{u\in f^{-1}(b)}\underset{\sim}{A}(u) \\ &= \{\underset{\sim}{A}(4),\ \underset{\sim}{A}(5)\}=0.1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\underset{\sim}{A})(c) &= \bigvee_{u\in f^{-1}(c)}\underset{\sim}{A}(u) \\ &= \vee\{\underset{\sim}{A}(6)\}=0.9 \end{aligned}$$

$$f(\underset{\sim}{A})(d)=\bigvee_{u\in f^{-1}(d)}\underset{\sim}{A}(u)=0.$$

所以

$$f(\underset{\sim}{A})=\frac{1}{a}+\frac{0.1}{b}+\frac{0.9}{c}+\frac{0}{d}$$

又设 $\underset{\sim}{B}=\frac{0.7}{a}+\frac{0.2}{b}+\frac{0.9}{c}+\frac{0}{d}$.则由$f^{-1}(\underset{\sim}{B})(u)=\underset{\sim}{B}(f(u))$

直接得出

$$f^{-1}(\underset{\sim}{B})=\frac{\underset{\sim}{B}(f(1))}{1}+\frac{\underset{\sim}{B}(f(2))}{2}+\cdots+\frac{\underset{\sim}{B}(f(6))}{6}$$

$$=\frac{0.7}{1}+\frac{0.7}{2}+\frac{0.7}{3}+\frac{0.2}{4}+\frac{0.2}{5}+\frac{0.9}{6}.$$

由映射 $f:U\to V$ 扩展的Fuzzy变换与Fuzzy反变换，显然可表示为

$$f(\underset{\sim}{A})=\int_V \Big(\bigvee_{u\in f^{-1}(V)} \underset{\sim}{A}(u)\Big)/v,$$

$$f^{-1}(\underset{\sim}{B})=\int_U \underset{\sim}{B}(f(u))/u.$$

定理2 给定 $f:U\to V$及 $\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(U)$.则

$$f(\underset{\sim}{A})=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha f(A_\alpha).$$

证 因为从映射$f:U\to V$扩展的普通集合变换为

$$f:\mathscr{P}(U)\to\mathscr{P}(V),$$

所以$f(A_\alpha)\in\mathscr{P}(V)$.

另一方面，由分解定理有

$$f(\underset{\sim}{A})=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha(f(\underset{\sim}{A}))_\alpha.$$

故只须证明 $f(\underset{\sim}{A}_{\dot{\alpha}})=(f(\underset{\sim}{A}))_{\dot{\alpha}}$. 事实上

$$v\in(f(\underset{\sim}{A}))_{\dot{\alpha}}\Longleftrightarrow f(\underset{\sim}{A})(v)>\alpha$$

$$\Longleftrightarrow\bigvee_{u\in f^{-1}(v)}\underset{\sim}{A}(u)>\alpha$$

$$\Longleftrightarrow\exists\ u\in f^{-1}(v)\text{ 使 }\underset{\sim}{A}(u)>\alpha$$

$$\Longleftrightarrow\exists\ u\in f^{-1}(v)\text{ 使 }u\in\underset{\sim}{A}_{\dot{\alpha}}$$

$$\Longleftrightarrow v\in f(\underset{\sim}{A}_{\dot{\alpha}})\ .$$ □

这个定理指出，对于给定的映射 f，通过 $f(\underset{\sim}{A})=\bigcup_{\alpha\in[0,1)}\alpha f(\underset{\sim}{A}_{\dot{\alpha}})$ 同样可扩展为Fuzzy变换 f .

定理3 设 $f:U\to V$ 则

(1) $f(\underset{\sim}{A})=\phi\Longleftrightarrow\underset{\sim}{A}=\phi$;

(2) $\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{A}'\Longrightarrow f(\underset{\sim}{A})\subseteq f(\underset{\sim}{A}')$;

(3) $f(\bigcup_{t\in T}\underset{\sim}{A}^{(t)})=\bigcup_{t\in T}f(\underset{\sim}{A}^{(t)})$, $\underset{\sim}{A}^{(t)}\in\mathscr{F}(U)$, $t\in T$;

(4) $f(\bigcap_{t\in T}\underset{\sim}{A}^{(t)})\subseteq\bigcap_{t\in T}f(\underset{\sim}{A}^{(t)})$, $\underset{\sim}{A}^{(t)}\in\mathscr{F}(U)$, $t\in T$.

证 (1) 设 $f(\underset{\sim}{A})=\phi$. 任取 $u_0\in U$，则 $f(u_0)=v_0$，$v_0\in f^{-1}(u_0)$. 因此 $\underset{\sim}{A}(u_0)\leqslant\bigvee_{u\in f^{-1}(v_0)}\underset{\sim}{A}(u)=f(\underset{\sim}{A})(v_0)=\phi(v_0)=0$. 从而 $\underset{\sim}{A}(u_0)=0$. 故 $\underset{\sim}{A}=\phi$.

反之，若 $\underset{\sim}{A}=\phi$，则 $\underset{\sim}{A}(u)=0$，$\forall u\in U$. 从而 $\forall v\in V$ 有

$$f(\underset{\sim}{A})(v)=\bigvee_{u\in f^{-1}(v)}\underset{\sim}{A}(u)=0$$

故$f(\underset{\sim}{A})=\phi$.

(2) 因为$\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{A}'$，所以$\forall u\in U$，$\underset{\sim}{A}(u)\leqslant\underset{\sim}{A}'(u)$，

$\bigvee_{u\in f^{-1}(v)}\underset{\sim}{A}(u)\leqslant\bigvee_{u\in f^{-1}(v)}\underset{\sim}{A}'(u)$.于是$f(\underset{\sim}{A})(v)\leqslant f(\underset{\sim}{A}')(v)$.即

$f(\underset{\sim}{A})\subseteq f(\underset{\sim}{A}')$.

(3) 当$v\in V\backslash f(U)$则有$f(\underset{\sim}{A}^{(t)})(v)=0$，$f(\bigcup_{t\in T}\underset{\sim}{A}^{(t)})=0$.

当$v\in f(U)$，则有

$$\begin{aligned}(f(\bigcup_{t\in T}\underset{\sim}{A}^{(t)}))(v)&=\bigvee_{u\in f^{-1}(v)}\bigvee_{t\in T}\underset{\sim}{A}^{(t)}(u)\\&=\bigvee_{t\in T}\bigvee_{u\in f^{-1}(v)}\underset{\sim}{A}^{(t)}(u)\\&=\bigvee_{t\in T}f(\underset{\sim}{A}^{(t)})(v)\\&=(\bigcup_{t\in T}f(\underset{\sim}{A}^{(t)}))(v).\end{aligned}$$

(4) 同上，只考虑$v\in f(U)$的情况 .于是

$$\begin{aligned}(f(\bigcap_{t\in T}\underset{\sim}{A}^{(t)}))(v)&=\bigvee_{u\in f^{-1}(v)}\bigwedge_{t\in T}\underset{\sim}{A}^{(t)}(u)\\&\leqslant\bigwedge_{t\in T}\bigvee_{u\in f^{-1}(v)}\underset{\sim}{A}^{(t)}(u)\\&=\bigwedge_{t\in T}f(\underset{\sim}{A}^{(t)})(v)\\&=(\bigcap_{t\in T}f(\underset{\sim}{A}))(v)\end{aligned}$$

□

定理4 设 $f:U\to V$，则

(1) $f^{-1}(\phi)=\phi$；

(2) 若f为满射且$f^{-1}(\underset{\sim}{B})=\phi$，则$\underset{\sim}{B}=\phi$；

(3) $\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{B}'\Longrightarrow f^{-1}(\underset{\sim}{B})\subseteq f^{-1}(\underset{\sim}{B}')$；

(4) $f^{-1}(\bigcup_{t\in T} \underset{\sim}{B}^{(t)}) = \bigcup_{t\in T} f^{-1}(\underset{\sim}{B}^{(t)})$;

(5) $f^{-1}(\bigcap_{t\in T} \underset{\sim}{B}^{(t)}) = \bigcap_{t\in T} f^{-1}(\underset{\sim}{B}^{(t)})$;

(6) $(f^{-1}(\underset{\sim}{B}))^c = f^{-1}(\underset{\sim}{B}^c)$.

证 (1)，(2)，(3)由读者完成.

(4) $$(f^{-1}(\bigcup_{t\in T} \underset{\sim}{B}^{(t)}))(u) = \bigvee_{t\in T} \underset{\sim}{B}^{(t)}(f(u))$$

$$= \bigvee_{t\in T} f^{-1}(\underset{\sim}{B}^{(t)})(u)$$

$$= (\bigcup_{t\in T} f^{-1}(\underset{\sim}{B}^{(t)}))(u).$$

(5) $$(f^{-1}(\bigcap_{t\in T} \underset{\sim}{B}^{(t)}))(u) = \bigwedge_{t\in T} \underset{\sim}{B}^{(t)}(f(u))$$

$$= \bigwedge_{t\in T} f^{-1}(\underset{\sim}{B}^{(t)})(u)$$

$$= (\bigcap_{t\in T} f^{-1}(\underset{\sim}{B}^{(t)}))(u).$$

(6) $$(f^{-1}(\underset{\sim}{B}))^c(u) = 1 - f^{-1}(\underset{\sim}{B})(u) = 1 - \underset{\sim}{B}(f(u))$$

$$= \underset{\sim}{B}^c(f(u)) = f^{-1}(\underset{\sim}{B}^c)(u).$$ □

定理5 设 $f:U\to V$，又 $\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(U)$，$\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(V)$，则

(1) $f(f^{-1}(\underset{\sim}{B}))\subseteq\underset{\sim}{B}$，且当$f$为满射时等号成立；

(2) $f^{-1}(f(\underset{\sim}{A}))\supseteq\underset{\sim}{A}$，且当$f$为单射时等号成立.

证 (1) $$f(f^{-1}(\underset{\sim}{B}))(v) = \bigvee_{u\in f^{-1}(v)} f^{-1}(\underset{\sim}{B})(u)$$

$$= \bigvee_{u \in f^{-1}(v)} \underset{\sim}{B}(f(u))$$

$$= \begin{cases} \underset{\sim}{B}(v) & \text{当} v \in f(U) \\ 0 & \text{当} v \in V \setminus f(U) \end{cases}$$

$$\leqslant \underset{\sim}{B}(v)$$

所以 $f(f^{-1}(\underset{\sim}{B})) \subseteq \underset{\sim}{B}$.

如果f为满射，那么在上述证明中必然使 $v \in f(U)$.因此 $f(f^{-1}(\underset{\sim}{B}))(v) = \underset{\sim}{B}(v)$即 $f(f^{-1}(\underset{\sim}{B})) = \underset{\sim}{B}$.

(2)　由于$\forall u \in U$，$\underset{\sim}{A}(u) \leqslant \bigvee_{u' \in f^{-1}(f(u))} \underset{\sim}{A}(u') =$

$f(\underset{\sim}{A})(f(u)) = f^{-1}(f(\underset{\sim}{A}))(u)$，故$f^{-1}(f(\underset{\sim}{A})) \supseteq \underset{\sim}{A}$.

如果f为单射，那么$f^{-1}(f(u))$是只含元素u的集.因此

$$\underset{\sim}{A}(u) = \bigvee_{u' \in f^{-1}(f(u))} \underset{\sim}{A}(u') = f(\underset{\sim}{A})(f(u))$$

$$= f^{-1}(f(\underset{\sim}{A}))(u) \quad . \qquad \square$$

上面曾经利用定理2从一个普通映射扩展为Fuzzy变换.现在谈谈另一种扩展方法.

定理6 给定f: $U \to V$及$\underset{\sim}{A} \in \mathscr{F}(U)$，则

$$f(\underset{\sim}{A}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha f(\underset{\sim}{A}_\alpha)$$

证 任取$v\in V$. 当$v\notin f(U)$时，$f(\underset{\sim}{A})(v)$以及每个$f(\underset{\sim}{A}_\alpha)(v)$都为0. 于是得出明显的等式

$$\left(\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha f(\underset{\sim}{A}_\alpha)\right)(v)=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\alpha f(\underset{\sim}{A}_\alpha)(v)=0,\quad f(\underset{\sim}{A})(v)$$

$=0$. 以下考察$v\in f(U)$的情形. 此时有

$$\left(\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha f(\underset{\sim}{A}_\alpha)\right)(v)=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\alpha f(\underset{\sim}{A}_\alpha)(v)$$

$$=\left[\bigvee_{\substack{\alpha\in[0,1]\\ v\in f(\underset{\sim}{A}_\alpha)}}\alpha f(\underset{\sim}{A}_\alpha)(v)\right]\vee\left[\bigvee_{\substack{\alpha\in[0,1]\\ v\notin f(\underset{\sim}{A}_\alpha)}}\alpha f(\underset{\sim}{A}_\alpha)(v)\right]$$

$$=\vee\{\alpha\mid\alpha\in[0,1]\text{且 }v\in f(\underset{\sim}{A}_\alpha)\}$$

$$=\vee\{\alpha\mid\alpha\in[0,1]\text{且}\exists u\in\underset{\sim}{A}_\alpha\text{使}f(u)=v\}$$

$$=\vee\{\alpha\mid\alpha\in[0,1]\text{且}\underset{\sim}{A}_\alpha(u)=1,u\in f^{-1}(v)\}$$

$$=\vee\{\alpha\underset{\sim}{A}_\alpha(u)\mid\alpha\in[0,1]\text{且}u\in f^{-1}(v)\}$$

$$=\bigvee_{u\in f^{-1}(v)}\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\alpha\underset{\sim}{A}_\alpha(u)$$

$$=\bigvee_{u\in f^{-1}(v)}\underset{\sim}{A}(u)$$

$$=f(\underset{\sim}{A})(v).$$

总之，在任何情况下均有$\left(\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha f(\underset{\sim}{A}_\alpha)\right)(v)=f(\underset{\sim}{A})(v)$. 因此

$$f(\underset{\sim}{A})=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha f(\underset{\sim}{A}_\alpha).$$ □

以前我们曾经利用等式 $(f(\underset{\sim}{A}))_\alpha = f(\underset{\sim}{A}_\alpha)$ 推导定理2，在这里能利用 $(f(\underset{\sim}{A}))_\alpha = f(\underset{\sim}{A}_\alpha)$ 推导定理 5 吗？这种想法是行不通的．事实上，等式 $(f(\underset{\sim}{A}))_\alpha = f(\underset{\sim}{A}_\alpha)$ 只对特殊的映射 f 才能成立．

定理7 设 $f: U \to V$，$\underset{\sim}{A} \in \mathscr{F}(U)$，则 $\forall \alpha \in [0,1]$，$(f(\underset{\sim}{A}))_\alpha = f(\underset{\sim}{A}_\alpha)$ 的充分必要条件是：$\forall v \in f(U)$，$\exists\, u_0 \in f^{-1}(v)$ 使得

$$f(\underset{\sim}{A})(v) = \underset{\sim}{A}(u_0).$$

证 充分性．因为

$$f(\underset{\sim}{A}_\alpha) = \left\{f(u) \mid \exists\, u \in \underset{\sim}{A}_\alpha\right\} = \left\{f(u) \mid \exists\, u \in U,\ \underset{\sim}{A}(u) \geqslant \alpha\right\},$$

所以对 $\forall f(u) \in f(\underset{\sim}{A}_\alpha)$，有

$$f(\underset{\sim}{A})(f(u)) = \bigvee_{x \in f^{-1}(f(u))} \underset{\sim}{A}(x) \geqslant \underset{\sim}{A}(u) \geqslant \alpha.$$

可见 $f(u) \in (f(\underset{\sim}{A}))_\alpha$．故 $f(\underset{\sim}{A}_\alpha) \subseteq (f(\underset{\sim}{A}))_\alpha$.

反过来，任取 $v \in (f(\underset{\sim}{A}))_\alpha$．即 $f(\underset{\sim}{A})(v) \geqslant \alpha$．利用已知条件，存在 $u_0 \in f^{-1}(v)$ 使 $f(\underset{\sim}{A})(v) = \underset{\sim}{A}(u_0)$ 于是 $\underset{\sim}{A}(u_0) \geqslant \alpha$．即 $u_0 \in \underset{\sim}{A}_\alpha$．故 $v = f(u_0) \in f(\underset{\sim}{A}_\alpha)$．所以 $(f(\underset{\sim}{A}))_\alpha \subseteq f(\underset{\sim}{A}_\alpha)$.

因此 $(f(\underset{\sim}{A}))_\alpha = f(\underset{\sim}{A}_\alpha)$.

必要性 任取$v \in f(U)$. 记$\alpha = f(\underset{\sim}{A})(v)$. 于是$v \in$

$(f(\underset{\sim}{A}))_\alpha = f(\underset{\sim}{A}_\alpha)$. 所以存在$u_0 \in \underset{\sim}{A}_\alpha$使$v = f(u_0)$. 这样

$$\underset{\sim}{A}(u_0) \geqslant \alpha = f(\underset{\sim}{A})(v) = \bigvee_{u \in f^{-1}(v)} \underset{\sim}{A}(u) \geqslant \underset{\sim}{A}(u_0)$$

于是

$$f(\underset{\sim}{A})(v) = \underset{\sim}{A}(u_0). \qquad \square$$

从理论的角度看，扩展原则让给定的映射扩展为Fuzzy变换，即让只取确定值的变量扩展为取模糊值的模糊变量．这意味着一个根本变化．由此可见，扩展原则为了将非模糊的数学概念扩展为模糊的数学概念铺平道路．

§5.2 多元扩展原则

一、Fuzzy集的直积

回顾普通集合的直积

$$A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots \times A^{(n)}$$

$$= \{(u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots, u^{(n)}) \mid u^{(i)} \in A^{(i)}, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

其特征函数

$$(A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots \times A^{(n)})(u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots u^{(n)}) = \bigwedge_{i=1}^{n} A^{(i)}(u^{(i)}).$$

推广到Fuzzy集，设$\underset{\sim}{A}^{(i)} \in \mathscr{F}(U^{(i)}), i = 1, 2, \cdots, n$. 我们把

$$\underset{\sim}{A}^{(1)} \times \underset{\sim}{A}^{(2)} \times \cdots \times \underset{\sim}{A}^{(n)} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda (\underset{\sim}{A}_\lambda^{(1)} \times \underset{\sim}{A}_\lambda^{(2)} \times \cdots \times$$

$\underset{\sim}{A}_\lambda^{(n)})$叫做$\underset{\sim}{A}^{(1)}, \underset{\sim}{A}^{(2)}, \cdots, \underset{\sim}{A}^{(n)}$的直积.

对于任何门限高度α，β，我们有

$$\alpha<\beta \Longrightarrow \underset{\sim}{A}_\alpha^{(i)} \supseteq \underset{\sim}{A}_\beta^{(i)} \quad i=1,2,\cdots,n.$$

因而

$$\alpha<\beta \Longrightarrow \underset{\sim}{A}_\alpha^{(1)} \times \underset{\sim}{A}_\alpha^{(2)} \times \cdots \times \underset{\sim}{A}_\alpha^{(n)} \supseteq \underset{\sim}{A}_\beta^{(1)} \times \underset{\sim}{A}_\beta^{(2)} \times \cdots \times \underset{\sim}{A}_\beta^{(n)}.$$

可见$\left\{\underset{\sim}{A}_\lambda^{(1)} \times \underset{\sim}{A}_\lambda^{(2)} \times \cdots \times \underset{\sim}{A}_\lambda^{(n)} \;\middle|\; \lambda \in [0,1]\right\}$构成$U^{(1)} \times U^{(2)} \times \cdots \times U^{(n)}$上的一个集合套．把$\underset{\sim}{A}_\alpha^{(1)} \times \underset{\sim}{A}_\alpha^{(2)} \times \cdots \times \underset{\sim}{A}_\alpha^{(n)}$看作§2.5引理1中的$H(\alpha)$便对任何$\lambda \in [0,1]$直接得到

$$(\underset{\sim}{A}^{(1)} \times \underset{\sim}{A}^{(2)} \times \cdots \times \underset{\sim}{A}^{(n)})_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq \underset{\sim}{A}_\lambda^{(1)} \times \underset{\sim}{A}_\lambda^{(2)} \times \cdots \underset{\sim}{A}_\lambda^{(n)}$$

$$\subseteq (\underset{\sim}{A}^{(1)} \times \underset{\sim}{A}^{(2)} \times \cdots \times \underset{\sim}{A}^{(n)})_\lambda,$$

$$(\underset{\sim}{A}^{(1)} \times \underset{\sim}{A}^{(2)} \times \cdots \times \underset{\sim}{A}^{(n)})_\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} (\underset{\sim}{A}_\alpha^{(1)} \times \underset{\sim}{A}_\alpha^{(2)} \times \cdots \times \underset{\sim}{A}_\alpha^{(n)}),$$

$$(\underset{\sim}{A}^{(1)} \times \underset{\sim}{A}^{(2)} \times \cdots \times \underset{\sim}{A}^{(n)})_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup_{\alpha>\lambda} (\underset{\sim}{A}_\alpha^{(1)} \times \underset{\sim}{A}_\alpha^{(2)} \times \cdots \times \underset{\sim}{A}_\alpha^{(n)}).$$

定理1 设$\underset{\sim}{A}^{(i)} \in \mathscr{F}(U^{(i)})$，$i=1,2,\cdots,n$．则$\underset{\sim}{A}^{(1)} \times \underset{\sim}{A}^{(2)} \times \cdots \times \underset{\sim}{A}^{(n)}$是$U^{(1)} \times U^{(2)} \times \cdots \times U^{(n)}$上的Fuzzy集，并且它的隶属函数

$$(\underset{\sim}{A}^{(1)} \times \underset{\sim}{A}^{(2)} \times \cdots \times \underset{\sim}{A}^{(n)})(u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots, u^{(n)}) = \bigwedge_{i=1}^{n} \underset{\sim}{A}^{(i)}(u^{(i)}).$$

证 因为对任何$\lambda \in [0,1]$，$\underset{\sim}{A}_\lambda^{(1)} \times \underset{\sim}{A}_\lambda^{(2)} \times \cdots \times \underset{\sim}{A}_\lambda^{(n)} \in \mathscr{F}(U^{(1)} \times U^{(2)} \times \cdots \times U^{(n)})$，所以由

$$\underset{\sim}{A}^{(1)} \times \underset{\sim}{A}^{(2)} \times \cdots \times \underset{\sim}{A}^{(n)} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(\underset{\sim}{A}_\lambda^{(1)} \times \underset{\sim}{A}_\lambda^{(2)} \times \cdots \times \underset{\sim}{A}_\lambda^{(n)})$$

知$\underset{\sim}{A}^{(1)} \times \underset{\sim}{A}^{(2)} \times \cdots \times \underset{\sim}{A}^{(n)} \in \mathscr{F}(U^{(1)} \times U^{(2)} \times \cdots \times U^{(n)})$，并且

$$\begin{aligned}
&(\underset{\sim}{A}^{(1)} \times \underset{\sim}{A}^{(2)} \times \cdots \times \underset{\sim}{A}^{(n)})(u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots, u^{(n)}) \\
&= \bigvee_{\lambda \in [0,1]} [\lambda \wedge (\underset{\sim}{A}_\lambda^{(1)} \times \underset{\sim}{A}_\lambda^{(2)} \times \cdots \times \underset{\sim}{A}_\lambda^{(n)})(u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots, u^{(n)})] \\
&= \bigvee_{\lambda \in [0,1]} \left[\lambda \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \underset{\sim}{A}_\lambda^{(i)}(u^{(i)})\right)\right] \\
&= \bigvee_{\lambda \in [0,1]} \bigwedge_{i=1}^{n} \left[\lambda \wedge \underset{\sim}{A}_\lambda^{(i)}(u^{(i)})\right]
\end{aligned}$$

很明显

$$\begin{aligned}
&\bigvee_{\lambda \in [0,1]} \bigwedge_{i=1}^{n} \left[\lambda \wedge \underset{\sim}{A}_\lambda^{(i)}(u^{(i)})\right] \\
&\leqslant \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{\lambda \in [0,1]} \left[\lambda \wedge \underset{\sim}{A}_\lambda^{(i)}(u^{(i)})\right].
\end{aligned}$$

在普通情形下，运算$\bigvee_{\lambda \in [0,1]}$与$\bigwedge_{i=1}^{n}$不一定能交换，即上式中的等号未必成立．但目前，$\underset{\sim}{A}_\lambda^{(i)}(u^{(i)})$的值非0则1且随门限高度

λ的增加而减少．对于这样的特殊情形，我们可以断言，上式中的等号永远成立．事实上，假如不等号出现的话，那么存在着α使得

$$\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\bigwedge_{i=1}^{n}\left[\lambda\wedge \underset{\sim}{A}_{\lambda}{}^{(i)}(u^{(i)})\right]<\alpha$$

$$<\bigwedge_{i=1}^{n}\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\left[\lambda\wedge \underset{\sim}{A}_{\lambda}{}^{(i)}(u^{(i)})\right].$$

若$\bigwedge_{i=1}^{n}\underset{\sim}{A}_{\alpha}{}^{(i)}(u^{(i)})=1$，则

$$\alpha>\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\bigwedge_{i=1}^{n}\left[\lambda\wedge \underset{\sim}{A}_{\lambda}{}^{(i)}(u^{(i)})\right]$$

$$\geqslant\bigwedge_{i=1}^{n}\left[\alpha\wedge \underset{\sim}{A}_{\alpha}{}^{(i)}(u^{(i)})\right]$$

$$=\alpha\wedge\left[\bigwedge_{i=1}^{n}\underset{\sim}{A}_{\alpha}{}^{(i)}(u^{(i)})\right]$$

$$=\alpha.$$

若$\bigwedge_{i=1}^{n}\underset{\sim}{A}_{\alpha}{}^{(i)}(u^{(i)})=0$，则存在$i_0$使$\underset{\sim}{A}_{\alpha}{}^{(i_0)}(u^{(i_0)})=0$．

于是对$\forall\lambda\geqslant\alpha$恒有$\underset{\sim}{A}_{\lambda}{}^{(i_0)}(u^{(i_0)})=0$，因此

$$\alpha<\bigwedge_{i=1}^{n}\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\left[\lambda\wedge \underset{\sim}{A}_{\lambda}{}^{(i)}(u^{(i)})\right]$$

$$\leqslant\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\left[\lambda\wedge \underset{\sim}{A}_{\lambda}{}^{(i_0)}(u^{(i_0)})\right]$$

$$= \bigvee_{\lambda \in [0,\alpha)} \left[\lambda \wedge \underset{\sim}{A}_\lambda^{(i_0)}(u^{(i_0)}) \right]$$

$$\leqslant \alpha.$$

这些矛盾，说明不等号不能出现．这样一来，

$$(\underset{\sim}{A}^{(1)} \times \underset{\sim}{A}^{(2)} \times \cdots \times \underset{\sim}{A}^{(n)})(u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots, u^{(n)})$$

$$= \bigvee_{\lambda \in [0,1]} \bigwedge_{i=1}^{n} \left[\lambda \wedge \underset{\sim}{A}_\lambda^{(i)}(u^{(i)}) \right]$$

$$= \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{\lambda \in [0,1]} \left[\lambda \wedge \underset{\sim}{A}_\lambda^{(i)}(u^{(i)}) \right]$$

$$= \bigwedge_{i=1}^{n} \underset{\sim}{A}^{(i)}(u^{(i)}) \quad .$$

□

这个定理清楚地表明，Fuzzy 集合的直积是普通集合的直积的直接引伸．定理 1 的另一种表达形式是

$$\underset{\sim}{A}^{(1)} \times \underset{\sim}{A}^{(2)} \times \cdots \times \underset{\sim}{A}^{(n)} = \int_{U^{(1)} \times U^{(2)} \times \cdots \times U^{(n)}} \bigwedge_{i=1}^{n} \underset{\sim}{A}^{(i)} (u)^{(i)} \Big/ (u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots, u^{(n)}).$$

例1 设$U = \{a, b, c, d, e\}$．又

$$\underset{\sim}{A} = \frac{0.3}{b} + \frac{0.6}{d} + \frac{0.8}{e},$$

$$\underset{\sim}{B} = \frac{0.9}{b} + \frac{0.4}{c} .$$

则 $\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$ 的直积

$$\underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{B} = \frac{0.3 \wedge 0.9}{(b,b)} + \frac{0.3 \wedge 0.4}{(b,c)} + \frac{0.6 \wedge 0.9}{(d,b)} + \frac{0.6 \wedge 0.4}{(d,c)}$$

$$+\frac{0.8\wedge 0.9}{(e,b)}+\frac{0.8\wedge 0.4}{(e,c)}$$

$$=\frac{0.3}{(b,b)}+\frac{0.3}{(b,c)}+\frac{0.6}{(d,b)}+\frac{0.4}{(d,c)}+\frac{0.8}{(e,b)}+$$

$$+\frac{0.4}{(e,c)}.$$

定理2 对任何$\lambda\in[0,1]$，Fuzzy集合的直积适合下列两等式

$$(\underset{\sim}{A}^{(1)}\times\underset{\sim}{A}^{(2)}\times\cdots\times\underset{\sim}{A}^{(n)})_{\lambda}=\underset{\sim}{A}_{\lambda}^{(1)}\times\underset{\sim}{A}_{\lambda}^{(2)}\times\cdots\times\underset{\sim}{A}_{\lambda}^{(n)},$$

$$(\underset{\sim}{A}^{(1)}\times\underset{\sim}{A}^{(2)}\times\cdots\times\underset{\sim}{A}^{(n)})_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\underset{\sim}{A}_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(1)}\times\underset{\sim}{A}_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(2)}\times\cdots\times\underset{\sim}{A}_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(n)}.$$

证 $(u^{(1)},u^{(2)},\cdots,u^{(n)})\in(\underset{\sim}{A}^{(1)}\times\underset{\sim}{A}^{(2)}\times\cdots\times\underset{\sim}{A}^{(n)})_{\lambda}$

$\Longleftrightarrow(\underset{\sim}{A}^{(1)}\times\underset{\sim}{A}^{(2)}\times\cdots\times\underset{\sim}{A}^{(n)})(u^{(1)},u^{(2)},\cdots,u^{(n)})\geqslant\lambda$

$\Longleftrightarrow\bigwedge\limits_{i=1}^{n}\underset{\sim}{A}^{(i)}(u^{(i)})\geqslant\lambda$

$\Longleftrightarrow\underset{\sim}{A}^{(i)}(u^{(i)})\geqslant\lambda,\quad i=1,2,\cdots,n.$

$\Longleftrightarrow u^{(i)}\in\underset{\sim}{A}_{\lambda}^{(i)},\quad i=1,2,\cdots,n.$

$\Longleftrightarrow(u^{(1)},u^{(2)},\cdots,u^{(n)})\in\underset{\sim}{A}_{\lambda}^{(1)}\times\underset{\sim}{A}_{\lambda}^{(2)}\times\cdots\times\underset{\sim}{A}_{\lambda}^{(n)}.$

因此第一个等式的确成立．同理推演第二个等式． □

二、多元扩展原则

设$\underset{\sim}{A}^{(i)}\in\mathscr{F}(U^{(i)})$，$i=1,2,\cdots,n$．定理1指出，它们的直积可以看作一个映射

$$\varphi:\mathscr{F}(U^{(1)})\times\mathscr{F}(U^{(2)})\times\cdots\times\mathscr{F}(U^{(n)})\to\mathscr{F}(U^{(1)}\times U^{(2)}\times\cdots\times U^{(n)}),$$

$$(\underset{\sim}{A}^{(1)}, \underset{\sim}{A}^{(2)}, \cdots, \underset{\sim}{A}^{(n)}) \longmapsto \underset{\sim}{A}^{(1)} \times \underset{\sim}{A}^{(2)} \times \cdots \times \underset{\sim}{A}^{(n)}.$$

现在利用这个映射引进多元扩展原则。

定义1 (n元扩展原则)设映射

$$f: U^{(1)} \times U^{(2)} \times \cdots \times U^{(n)} \to W$$

扩展为Fuzzy变换

$$f': \mathscr{F}(U^{(1)} \times U^{(2)} \times \cdots \times U^{(n)}) \to \mathscr{F}(W).$$

我们把复合映射

$$f' \circ \varphi: \mathscr{F}(U^{(1)}) \times \mathscr{F}(U^{(2)}) \times \cdots \times \mathscr{F}(U^{(n)}) \to \mathscr{F}(W)$$

叫做映射f的**n元扩展**。

根据定义1不难计算映射f的n元扩展的隶属函数，

$$((f' \circ \varphi)(\underset{\sim}{A}^{(1)}, \underset{\sim}{A}^{(2)}, \cdots, \underset{\sim}{A}^{(n)}))(w)$$

$$= (f'\varphi(\underset{\sim}{A}^{(1)}, \underset{\sim}{A}^{(2)}, \cdots, \underset{\sim}{A}^{(n)}))(w)$$

$$= (f'(\underset{\sim}{A}^{(1)} \times \underset{\sim}{A}^{(2)} \times \cdots \times \underset{\sim}{A}^{(n)}))(w)$$

$$= \bigvee_{(u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots, u^{(n)}) \in f^{-1}(w)} (\underset{\sim}{A}^{(1)} \times \underset{\sim}{A}^{(2)} \times \cdots \times \underset{\sim}{A}^{(n)}) (u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots, u^{(n)})$$

$$= \bigvee_{(u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots, u^{(n)}) \in f^{-1}(w)} [\underset{\sim}{A}^{(1)}(u^{(1)}) \wedge \underset{\sim}{A}^{(2)}(u^{(2)}) \wedge \cdots \wedge \underset{\sim}{A}^{(n)}(u^{(n)})].$$

为简便计，今后把映射

$$f: U^{(1)} \times U^{(2)} \times \cdots \times U^{(n)} \to W$$

的n元扩展$f' \circ \varphi$仍然写为f，即

$$f: \mathscr{F}(U^{(1)}) \times \mathscr{F}(U^{(2)}) \times \cdots \times \mathscr{F}(U^{(n)}) \to \mathscr{F}(W)$$

$$
\begin{aligned}
&f(\underset{\sim}{A}^{(1)}, \underset{\sim}{A}^{(2)}, \cdots, \underset{\sim}{A}^{(n)}) \\
&= \bigvee_{(u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots, u^{(n)}) \in f^{-1}(w)} [\underset{\sim}{A}^{(1)}(u^{(1)}) \wedge \underset{\sim}{A}^{(2)}(u^{(2)}) \wedge \cdots \wedge \underset{\sim}{A}^{(n)}(u^{(n)})].
\end{aligned}
$$

换言之，

$$
\begin{aligned}
&f(\underset{\sim}{A}^{(1)}, \underset{\sim}{A}^{(2)}, \cdots, \underset{\sim}{A}^{(n)}) \\
&= \int_W \bigvee_{(u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots, u^{(n)}) \in f^{-1}(w)} [\underset{\sim}{A}^{(1)}(u^{(1)}) \wedge \underset{\sim}{A}^{(2)}(u^{(2)}) \wedge \cdots \wedge \underset{\sim}{A}^{(n)}(u^{(n)})] / w.
\end{aligned}
$$

对 $A^{(i)} \in \mathscr{P}(U^{(i)})$，$i=1,2,\cdots,n$ 这种特殊情况，$f(A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(n)})$ 的表达式还可简化。事实上，此时

$$
\begin{aligned}
&f(A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(n)})(w) \\
&= \bigvee_{(u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots, u^{(n)}) \in f^{-1}(w)} [A^{(1)}(u^{(1)}) \wedge A^{(2)}(u^{(2)}) \wedge \cdots \wedge A^{(n)}(u^{(n)})] \\
&= \begin{cases} 1 & \exists\, u^{(i)} \in A^{(i)}, i=1,2,\cdots,n \text{ 使 } f(u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots, u^{(n)}) = w \\ 0 & \text{其它} \end{cases}
\end{aligned}
$$

因而

$$
\begin{aligned}
&f(A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(n)}) \\
&= \{f(u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots, u^{(n)}) \mid u^{(i)} \in A^{(i)}, i=1,2,\cdots,n\}.
\end{aligned}
$$

定理3 $f(\underset{\sim}{A}^{(1)}, \underset{\sim}{A}^{(2)}, \cdots, \underset{\sim}{A}^{(n)}) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f(\underset{\sim}{A}_\lambda^{(1)}, \underset{\sim}{A}_\lambda^{(2)}, \cdots, \underset{\sim}{A}_\lambda^{(n)})$.

证 根据n元扩展原则的定义，

$$
\begin{aligned}
f(\underset{\sim}{A}^{(1)}, \underset{\sim}{A}^{(2)}, \cdots, \underset{\sim}{A}^{(n)}) &= (f' \circ \varphi)(\underset{\sim}{A}^{(1)}, \underset{\sim}{A}^{(2)}, \cdots, \underset{\sim}{A}^{(n)}) \\
&= f'\varphi(\underset{\sim}{A}^{(1)}, \underset{\sim}{A}^{(2)}, \cdots, \underset{\sim}{A}^{(n)}) \\
&= f'(\underset{\sim}{A}^{(1)} \times \underset{\sim}{A}^{(2)} \times \cdots \times \underset{\sim}{A}^{(n)}).
\end{aligned}
$$

由§5.1定理6，

$$
f'(\underset{\sim}{A}^{(1)} \times \underset{\sim}{A}^{(2)} \times \cdots \times \underset{\sim}{A}^{(n)}) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f'((\underset{\sim}{A}^{(1)} \times \underset{\sim}{A}^{(2)} \times \cdots \times \underset{\sim}{A}^{(n)})_\lambda).
$$

因此

$$
\begin{aligned}
f(\underset{\sim}{A}^{(1)}, \underset{\sim}{A}^{(2)}, \cdots, \underset{\sim}{A}^{(n)}) &= \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f'((\underset{\sim}{A}^{(1)} \times \underset{\sim}{A}^{(2)} \times \cdots \times \underset{\sim}{A}^{(n)})_\lambda) \\
&= \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f'(\underset{\sim}{A}_\lambda^{(1)} \times \underset{\sim}{A}_\lambda^{(2)} \times \cdots \times \underset{\sim}{A}_\lambda^{(n)}) \\
&= \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f'\varphi(\underset{\sim}{A}_\lambda^{(1)}, \underset{\sim}{A}_\lambda^{(2)}, \cdots, \underset{\sim}{A}_\lambda^{(n)}) \\
&= \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f(\underset{\sim}{A}_\lambda^{(1)}, \underset{\sim}{A}_\lambda^{(2)}, \cdots, \underset{\sim}{A}_\lambda^{(n)}).
\end{aligned}
$$

□

以上所论的多元扩展原则适用于任何映射。如果映射

$$f: U^{(1)} \times U^{(2)} \times \cdots \times U^{(n)} \to W$$

对每个$w \in W$永远令$f^{-1}(w)$为有限集，那么还可以让配对的三角范算子$\top$，$\bot$分别代替$\wedge$，$\vee$，并规定映射f的另一种多元扩展

$$f(\underset{\sim}{A}^{(1)}, \underset{\sim}{A}^{(2)}, \cdots, \underset{\sim}{A}^{(n)})$$

$$= \int_W \underset{(u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots, u^{(n)}) \in f^{-1}(w)}{\bot} [\underset{\sim}{A}^{(1)}(u^{(1)}) \top \underset{\sim}{A}^{(2)}(u^{(2)}) \top \cdots$$

$$\top \underset{\sim}{A}^{(n)}(u^{(n)})] \Big/ w.$$

例2 在论域$U=\{$所有非负整数$0,1,\cdots\}$上给定两个Fuzzy集

$$\underset{\sim}{A} = \frac{0.3}{0} + \frac{1}{1} + \frac{0.3}{2},$$

$$\underset{\sim}{B} = \frac{0.2}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.2}{3}.$$

又设二元函数$f: U \times U \to U$代表加法。计算$\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B} = ?$ 计算时依次令$\top$，$\bot$为$\wedge$，$\vee$；$\hat{\cdot}$，$\hat{+}$；$\odot$，$\oplus$。

解 对每个$u \in U$，$f^{-1}(u)$明显地是有限集。

(1) $\top$取为$\wedge$，$\bot$取为$\vee$.

根据二元扩展原则

$$\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B} = \int_U \bigvee_{u+v=w} [\underset{\sim}{A}(u) \wedge \underset{\sim}{B}(v)] \Big/ w$$

$$=\frac{\underset{\sim}{A}(0)\wedge\underset{\sim}{B}(0)}{0}+\frac{[\underset{\sim}{A}(0)\wedge\underset{\sim}{B}(1)]\vee[\underset{\sim}{A}(1)\wedge\underset{\sim}{B}(0)]}{1}$$

$$+\frac{[\underset{\sim}{A}(0)\wedge\underset{\sim}{B}(2)]\vee[\underset{\sim}{A}(1)\wedge\underset{\sim}{B}(1)]\wedge[\underset{\sim}{A}(2)\wedge\underset{\sim}{B}(0)]}{2}$$

$$+\cdots$$

$$=\frac{0}{0}+\frac{0.2\vee 0}{1}+\frac{0.3\vee 0.2\vee 0}{2}+\cdots$$

$$=\frac{0.2}{1}+\frac{0.3}{2}+\frac{1}{3}+\frac{0.3}{4}+\frac{0.2}{5}$$

(2) ⊤，⊥分别取为$\hat{\cdot}$，$\hat{+}$.

$$\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{B}=\int_U \hat{+}_{u+v=w}[\underset{\sim}{A}(u)\hat{\cdot}\underset{\sim}{B}(v)]\Big/ w$$

$$=\frac{\underset{\sim}{A}(0)\hat{\cdot}\underset{\sim}{B}(0)}{0}+\frac{[\underset{\sim}{A}(0)\hat{\cdot}\underset{\sim}{B}(1)]\hat{+}[\underset{\sim}{A}(1)\hat{\cdot}\underset{\sim}{B}(0)]}{1}$$

$$+\frac{[\underset{\sim}{A}(0)\hat{\cdot}\underset{\sim}{B}(2)]\hat{+}[\underset{\sim}{A}(1)\hat{\cdot}\underset{\sim}{B}(1)]\hat{+}[\underset{\sim}{A}(2)\hat{\cdot}\underset{\sim}{B}(0)]}{2}$$

$$+\cdots$$

$$=\frac{0}{0}+\frac{0.06\hat{+}0}{1}+\frac{0.3\hat{+}0.2\hat{+}0}{2}+\cdots$$

$$=\frac{0.06}{1}+\frac{0.44}{2}+\frac{1}{3}+\frac{0.44}{4}+\frac{0.06}{5}$$

(3) ⊤，⊥分别取为⊙，⊕。

$$\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{B}=\int_{U}\underset{u+v=w}{\oplus}[\underset{\sim}{A}(u)\odot\underset{\sim}{B}(v)]\Big/w$$

$$=\frac{0.5}{2}+\frac{1}{3}+\frac{0.5}{4}.$$

计算结果指出，在Fuzzy集直积的二元扩展中，$\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{B}$随{T，⊥}的改变而改变。如果把Fuzzy集$\underset{\sim}{A}$直觉地解释为近似于1的整数，记作$\underset{\sim}{1}$。并把$\underset{\sim}{B}$直觉地解释为近似于2的整数，记作2，那么三种计算结果都可解释为近似于3的整数，即$\underset{\sim}{3}$。但它们的模糊度有明显的差别。采用∧，∨则$\underset{\sim}{A}+B$的模糊度最小，采用⊙，⊕则$\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{B}$的模糊度最大。

透过例2看到，以二元扩展原则为基础，无形中已把整数的加法运算扩展为Fuzzy整数的加法运算。

§5.3 凸Fuzzy集与Fuzzy实数

一、区间数

从区间数说起，它是最简单的一种Fuzzy实数。

定义1 设R为实数域，a，$b\in$ R 且$a\leqslant b$。$[a,b]$称为区间数。当$a>0$时，$[a,b]$称为**正区间数**，当$b<0$时，$[a,b]$称为**负区间数**。

此外约定空集ϕ也是一个区间数。R上的区间数的全体记为$\mathscr{I}$(R)。

设f是实数域R上的一个二元运算

$$f: \mathrm{R}\times\mathrm{R}\to\mathrm{R}.$$

又 $[a,b]$，$[c,d] \in \mathscr{I}(\mathbf{R})$。我们利用 f 的二元扩展计算 $f([a,b],[c,d])$. 对任何 $z \in \mathbf{R}$，

$$f([a,b],[c,d])(z) = \bigvee_{(x,y)\in f^{-1}(z)} ([a,b](x) \wedge [c,d](y))$$

$$= \begin{cases} 1 & \exists x \in [a,b] \text{及} y \in [c,d] \text{使} f(x,y) = z \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

于是

$$f([a,b],[c,d]) = \{f(x,y) \mid x \in [a,b] \quad y \in [c,d]\}$$

据此引进如下定义

定义2 给定区间数 $[a,b]$，$[c,d]$，又 $*$ 是实数的一个二元运算，设集合

$$\{x*y \mid x \in [a,b],\ y \in [c,d]\}$$

也是区间数。则称区间数 $[a,b]$，$[c,d]$ 可以作运算 $*$，并将运算结果记为 $[a,b]*[c,d]$。

例1 设 $*$ 依次代表 $+$，$-$，$\times$，$\div$，$\vee$，$\wedge$。计算 $[-2,4]*[1,3]$。

解 根据定义2，我们有

$$[-2,4]+[1,3] = \{x+y \mid -2 \leqslant x \leqslant 4,\ 1 \leqslant y \leqslant 3\} = [-1,7];$$

$$[-2,4]-[1,3] = \{x-y \mid -2 \leqslant x \leqslant 4,\ 1 \leqslant y \leqslant 3\} = [-5,3];$$

$$[-2,4]\times[1,3] = \{x \times y \mid -2 \leqslant x \leqslant 4,\ 1 \leqslant y \leqslant 3\} = [-6,12];$$

$$[-2,4]\div[1,3] = \{x \div y \mid -2 \leqslant x \leqslant 4,\ 1 \leqslant y \leqslant 3\} = [-2,4];$$

$$[-2,4]\vee[1,3]=\{x\vee y\mid -2\leqslant x\leqslant 4,\ 1\leqslant y\leqslant 3\}$$
$$=[1,4];$$

$$[-2,4]\wedge[1,3]=\{x\wedge y\mid -2\leqslant x\leqslant 4,\ 1\leqslant y\leqslant 3\}$$
$$=[-2,3].$$

这里纯粹从二元运算的角度讨论区间数，下面利用几何形象以及借助极限概念来了解区间数。

二．闭凸 Fuzzy 集

定义3 设 U 是欧氏空间，$A\in\mathscr{P}(U)$。

(i) 当且仅当任何 u_1, $u_2\in A$ 以及任何 $\lambda\in[0,1]$都使 $\lambda u_1+(1-\lambda)u_2\in A$ 时，A 称为 U 中的**凸集**；

(ii) 当且仅当 A 中的点构成的每个收敛序列都以 A 中的点为极限时，(即从 $u_n\in A$ 及 $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=a$ 推出 $a\in A$)，A 叫做 U 中的**闭集**；

(iii) 既闭且凸的集叫做闭凸集，且约定 ϕ，U都是**闭凸集**。

在低维欧氏空间中，易对凸集作直观解释；如果 $u_1, u_2\in A$，则线段 $\overline{u_1u_2}$整个包含于 A。事实上记

$$u=\lambda u_1+(1-\lambda)u_2=u_1+(1-\lambda)(u_2-u_1)$$

那么 λ 从 1 变为 0 时，u 的轨迹便成为直线段 u_1u_2。图 1 中的 A 是三维欧氏空间中的凸集；图 2 中的 A 不是凸集。

区间数可以用闭凸集来刻划，此即

定理1 设 A 为实数域 R 中的有界集．则 A 为闭凸集的充分必要条件是 A 为区间数。

证 当 $A=\phi$，依照定义 1 及定义 3 中的约定，定理 1

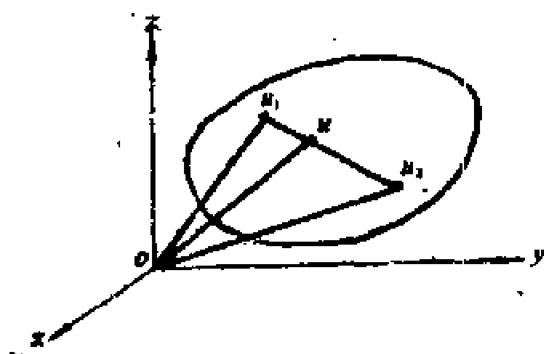


图1

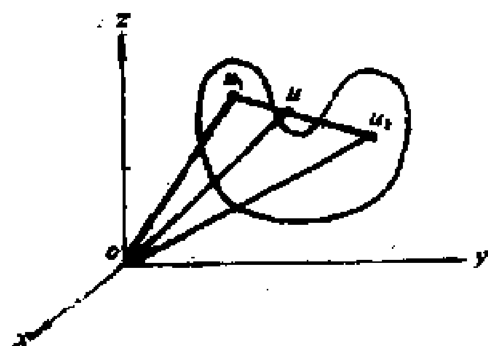


图2

自动成立。当 $A\neq\phi$，充分性是明显的。现证必要性。

设 A 为非空闭凸集。令 $\text{Inf}\,A=a$，$\text{Sup}A=b$，显然有 $A\subseteq[a,b]$。反过来，由于 A 是闭集，故 $a,b\in A$，又利用 A 的凸性知 $[a,b]\subseteq A$。总之，$A=[a,b]$。 □

定义4 设 U 是欧氏空间，又给定普通集 A，$B\in\mathscr{P}(U)$ 以及实数 $\lambda\in[0,1]$。我们把普通集

$$(A,B;\lambda)=\{\lambda a+(1-\lambda)b\,|\,a\in A,b\in B\}$$

叫做 A,B 的一个**凸组合**，记作 $(A,B;\lambda)=\lambda A+(1-\lambda)B$。

例2 凸集 A,B 的凸组合 $(A,B;\lambda)$ 也是凸集。

任取 $u_1,u_2\in(A,B;\lambda)$ 以及任何 $\alpha\in[0,1]$。记 $u_1=\lambda a_1+(1-\lambda)b_1$，$u_2=\lambda a_2+(1-\lambda)b_2$，其中 $a_1,a_2\in A$，$b_1,b_2\in B$。于是

$$\begin{aligned}\alpha u_1+(1-\alpha)u_2&=\alpha[\lambda a_1+(1-\lambda)b_1]+(1-\alpha)[\lambda a_2+(1-\lambda)b_2]\\&=\lambda[\alpha a_1+(1-\alpha)a_2]+(1-\lambda)[\alpha b_1+(1-\alpha)b_2]\end{aligned}$$

因为 A,B 均为凸集，所以 $\alpha a_1+(1-\alpha)a_2\in A$，$\alpha b_1+(1-\alpha)b_2\in B$。于是 $\alpha u_1+(1-\alpha)u_2\in(A,B;\lambda)$。这等于说 $(A,B;\lambda)$ 为凸集。

定义5 设U是欧氏空间，$\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(U)$。

(i) $\underset{\sim}{A}$称为凸Fuzzy集，意思是指$\forall\alpha\in[0,1]$，$\underset{\sim}{A}_\alpha$均为凸集；

(ii) $\underset{\sim}{A}$称为闭Fuzzy集，意思是指$\forall\alpha\in[0,1]$，$\underset{\sim}{A}_\alpha$均为闭集。

定理2 设U是欧氏空间，又$\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(U)$。那么$\underset{\sim}{A}$为凸Fuzzy集的充分必要条件是对任何$u_1,u_2\in U$及任何$\lambda\in[0,1]$，不等式

$$\underset{\sim}{A}(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)\geqslant\underset{\sim}{A}(u_1)\wedge\underset{\sim}{A}(u_2)$$

永远成立。

证 充分性。证$\underset{\sim}{A}$的每个α-截集$\underset{\sim}{A}_\alpha$均为凸集。因为已约定$\phi$为凸集，所以只考虑$\underset{\sim}{A}_\alpha\neq\phi$的情形就够了。

任取u_1，$u_2\in\underset{\sim}{A}_\alpha$以及$\lambda\in[0,1]$。于是$\underset{\sim}{A}(u_1)$，$\underset{\sim}{A}(u_2)\geqslant\alpha$。根据已知条件$\underset{\sim}{A}(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)\geqslant\underset{\sim}{A}(u_1)\wedge\underset{\sim}{A}(u_2)\geqslant\alpha$，所以$\lambda u_1+(1-\lambda)u_2\in\underset{\sim}{A}_\alpha$。换言之，$\underset{\sim}{A}_\alpha$为凸集

必要性。设$\underset{\sim}{A}$为凸Fuzzy集。任取u_1，$u_2\in U$以及$\lambda\in[0,1]$。令$\alpha=\underset{\sim}{A}(u_1)\wedge\underset{\sim}{A}(u_2)$，于是$\underset{\sim}{A}(u_1)$，$\underset{\sim}{A}(u_2)\geqslant\alpha$。所以$u_1,u_2\in\underset{\sim}{A}_\alpha$。根据假设$\underset{\sim}{A}_\alpha$为凸集，因此$\lambda u_1+(1-\lambda)u_2\in\underset{\sim}{A}_\alpha$，即$A(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)\geqslant\alpha$。故$\underset{\sim}{A}(u_1+(1-\lambda)u_2)\geqslant\underset{\sim}{A}(u_1)\wedge\underset{\sim}{A}(u_2)$。 □

定理3 设$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$为凸Fuzzy集，则$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}$是凸Fuzzy集。

证 $\forall u_1,\ u_2\in U,\ \forall \alpha\in[0,1]$,

$$\begin{aligned}(\underset{\sim}{A}\cap \underset{\sim}{B})(\alpha u_1+(1-\alpha)u_2) &= \underset{\sim}{A}(\alpha u_1+(1-\alpha)u_2)\wedge \underset{\sim}{B}(\alpha u_1\\ &\quad +(1-\alpha)u_2)\\ &\geqslant \underset{\sim}{A}(u_1)\wedge \underset{\sim}{A}(u_2)\wedge \underset{\sim}{B}(u_1)\wedge \underset{\sim}{B}(u_2)\\ &=(\underset{\sim}{A}(u_1)\wedge \underset{\sim}{B}(u_1))\wedge(\underset{\sim}{A}(u_2)\wedge \underset{\sim}{B}(u_2))\\ &=(\underset{\sim}{A}\cap \underset{\sim}{B})(u_1)\wedge(\underset{\sim}{A}\cap \underset{\sim}{B})(u_2)\end{aligned}$$

因此 $\underset{\sim}{A}\cap \underset{\sim}{B}$ 为凸Fuzzy集。 □

定义6 设$\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$, $\underset{\sim}{\Lambda}\in\mathscr{F}(U)$。$\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$关于$\underset{\sim}{\Lambda}$的凸组合是一个Fuzzy集，记作$(\underset{\sim}{A},\ \underset{\sim}{B};\ \underset{\sim}{\Lambda})$其隶属函数为

$$(\underset{\sim}{A},\ \underset{\sim}{B};\ \underset{\sim}{\Lambda})(u)=\underset{\sim}{\Lambda}(u)\underset{\sim}{A}(u)+\left(1-\underset{\sim}{\Lambda}(u)\right)\underset{\sim}{B}(u).$$

一般地，设$\underset{\sim}{A}^{(i)}$, $\underset{\sim}{\Lambda}^{(i)}\in\mathscr{F}(U)$, $i=1,2,\cdots,n$, 且$\sum_{i=1}^{n}\underset{\sim}{\Lambda}^{(i)}(u)=1\ (\forall u\in U)$. 则$\underset{\sim}{A}^{(i)}$关于$\underset{\sim}{\Lambda}^{(i)}$的凸组合记为$(\underset{\sim}{A}^{(1)},\underset{\sim}{A}^{(2)},\cdots\cdots,\underset{\sim}{A}^{(n)};\ \underset{\sim}{\Lambda}^{(1)},\underset{\sim}{\Lambda}^{(2)},\cdots,\underset{\sim}{\Lambda}^{(n)})$;

$$(\underset{\sim}{A}^{(1)},\underset{\sim}{A}^{(2)},\cdots,\underset{\sim}{A}^{(n)};\ \underset{\sim}{\Lambda}^{(1)},\underset{\sim}{\Lambda}^{(2)},\cdots,\underset{\sim}{\Lambda}^{(n)})(u)=\sum_{i=1}^{n}\underset{\sim}{A}^{(i)}(u)\underset{\sim}{\Lambda}^{(i)}(u).$$

定理4 对任给的$\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$, $\underset{\sim}{\Lambda}\in\mathscr{F}(U)$, 有

$$\underset{\sim}{A}\cap \underset{\sim}{B}\subseteq(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B};\ \underset{\sim}{\Lambda})\subseteq \underset{\sim}{A}\cup \underset{\sim}{B}.$$

证 对$u\in U$，先考虑$\underset{\sim}{B}(u)\leqslant\underset{\sim}{A}(u)$的情况。此时有

$$\underset{\sim}{B}(u)\leqslant\underset{\sim}{B}(u)+\underset{\sim}{\Lambda}(u)(\underset{\sim}{A}(u)-\underset{\sim}{B}(u))$$

$$=\underset{\sim}{\Lambda}(u)\underset{\sim}{A}(u)+(1-\underset{\sim}{\Lambda}(u))\underset{\sim}{B}(u)$$

$$\leqslant\underset{\sim}{\Lambda}(u)\underset{\sim}{A}(u)+(1-\underset{\sim}{\Lambda}(u))\underset{\sim}{A}(u)=\underset{\sim}{A}(u).$$

同理，当$\underset{\sim}{A}(u)\leqslant\underset{\sim}{B}(u)$时有$\underset{\sim}{A}(u)\leqslant(\underset{\sim}{A},\ \underset{\sim}{B};\ \underset{\sim}{\Lambda})(u)\leqslant\underset{\sim}{B}(u)$。因此

$$\mathrm{Min}(\underset{\sim}{A}(u),\ \underset{\sim}{B}(u))\leqslant(\underset{\sim}{A},\ \underset{\sim}{B};\ \underset{\sim}{\Lambda})(u)$$

$$\leqslant\mathrm{Max}(\underset{\sim}{A}(u),\ \underset{\sim}{B}(u)).$$

即

$$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}\subseteq(\underset{\sim}{A},\ \underset{\sim}{B};\ \underset{\sim}{\Lambda})\subseteq\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}.$$ □

给定$\underset{\sim}{A},\ \underset{\sim}{B},\ \underset{\sim}{C}\in\mathscr{F}(U)$。若$\underset{\sim}{C}$满足$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{C}\subseteq\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}$。则存在$\underset{\sim}{\Lambda}\in\mathscr{F}(U)$，使得$(\underset{\sim}{A},\ \underset{\sim}{B};\ \underset{\sim}{\Lambda})=\underset{\sim}{C}$。

事实上，取这样的$\underset{\sim}{\Lambda}\in\mathscr{F}(U)$，其隶属度

$$\underset{\sim}{\Lambda}(u)=\begin{cases}\dfrac{\underset{\sim}{C}(u)-\underset{\sim}{B}(u)}{\underset{\sim}{A}(u)-\underset{\sim}{B}(u)}, & \text{当}\underset{\sim}{A}(u)\neq\underset{\sim}{B}(u);\\ \underset{\sim}{A}(u)\quad, & \text{当}\underset{\sim}{A}(u)=\underset{\sim}{B}(u).\end{cases}$$

便有$(\underset{\sim}{A},\ \underset{\sim}{B};\ \underset{\sim}{\Lambda})=\underset{\sim}{C}$。

定义7 (i) 设A是实数域上的Fuzzy集，$\underset{\sim}{A}$称为有界，

意思是说，对任何$\alpha\in(0, 1]$，α-截集A_α都是有界集。

(ii) 实数域上的正规闭凸有界Fuzzy 集称为 Fuzzy 实数。Fuzzy实数的全体记作$\mathscr{F}^*(\mathrm{R})$。

现在谈谈实数域上的有界 Fuzzy 集成为 Fuzzy 实数的判别法。

定理5 设A是实数域上的有界Fuzzy 集. 那么A成为Fuzzy 实数的充分必要条件是存在着区间$[a, b]$使得

$$A(u)=\begin{cases}1 & 当 a\leqslant u\leqslant b\\ L(u) & 当 u<a\\ R(u) & 当 u>b\end{cases}$$

其中$L(u)$是递增的右连续函数，$0\leqslant L(u)<1$，且$\lim\limits_{u\to-\infty} L(u)=0$；$R(u)$是递减的左连续函数，$0\leqslant R(u)<1$，且$\lim\limits_{u\to+\infty} R(u)=0$。

证 必要性

因为A为Fuzzy 实数，所以对每个$\alpha\in(0,1]$，A_α是非空闭区间。记作$A_\alpha=[a_\alpha,b_\alpha]$，令$[a, b]=[a_1,b_1]$。于是在$[a,b]$上，$A(u)=1$；在$[a, b]$外，$A(u)<1$。并且$A=\bigcup\limits_{\alpha\in(0,1]}\alpha A_\alpha=\bigcup\limits_{\alpha\in(0,1]}\alpha[a_\alpha, b_\alpha]$。

对任何$u<a$，令

$$L(u)=A(u)=\bigvee_{\alpha\in(0,1]}\left[\alpha\wedge \chi_{[a_\alpha, b_\alpha]}(u)\right]$$

$$= \bigvee\{\alpha \mid u \in [a_\alpha,\ b_\alpha],\ \alpha \in (0,\ 1)\}$$

$$= \bigvee\{\alpha \mid u \in [a_\alpha,\ a),\ \alpha \in (0,\ 1)\}$$

$$= \bigvee\{\alpha \mid a_\alpha \leqslant u,\ \alpha \in (0,\ 1)\}$$

因而对任何$u_1 < u_2 < a$均有

$$L(u_1) = \bigvee\{\alpha \mid a_\alpha \leqslant u_1,\ \alpha \in (0,\ 1)\}$$

$$\leqslant \bigvee\{\alpha \mid a_\alpha \leqslant u_2,\ \alpha \in (0,\ 1)\}$$

$$= L(u_2).$$

可见$L(u)$是递增函数。此外，明显地有 $0 \leqslant L(u) < 1$。

还要证明$L(u)$的右连续性。用反证法。假设存在$u_0 < a$及单调下降序列$u_n \downarrow u_0$，$u_0 \leqslant u_n < a$使

$$\lim_{u_n \to u_0^+} L(u_n) = \alpha > L(u_0).$$

既然$L(u)$单调增加，于是$\underset{\sim}{A}(u_n) = L(u_n) \geqslant \alpha$。故$u_n \in \underset{\sim}{A}_\alpha$。利用$A_\alpha$的闭性推出 $u_0 \in \underset{\sim}{A}_\alpha$。所以$L(u_0) = \underset{\sim}{A}(u_0) \geqslant \alpha$。前后冲突。因此$L(u)$的确右连续。

不难断定$\lim\limits_{u \to -\infty} L(u) = 0$。事实上，极限$\beta = \lim\limits_{u \to -\infty} L(u)$显然是存在的，假如$\beta > 0$的话，那么利用$L(u)$的单调增加性便知，对任何$u < a$均有 $\underset{\sim}{A}(u) = L(u) \geqslant \beta > 0$，从而 $\underset{\sim}{A}_\beta$为无界集。这与$\underset{\sim}{A}$是有界 Fuzzy 集矛盾。

类似地，对任何$u > b$，定义

$$R(u)=\underset{\sim}{A}(u)=\bigvee_{\alpha\in(0,1)}\left[\alpha\wedge \chi_{[a_\alpha,\ b_\alpha]}(u)\right]$$

$$=\bigvee\{\alpha\,|\,u\leqslant b_\alpha,\ \alpha\in(0,\ 1)\}$$

即可推知 $R(u)$ 是递减左连续函数，$0\leqslant R(u)<1$，且 $\lim\limits_{u\to+\infty}R(u)=0$。

充分性

$\underset{\sim}{A}=[a,\ b]$显然是一个闭凸集。因此只须对任何$\alpha\in(0,1)$证明有界集$\underset{\sim}{A}_\alpha$具有闭凸性就行了。为此，令 $a_\alpha=\wedge\{u\,|\,L(u)\geqslant\alpha\}$，$b_\alpha=\vee\{u\,|\,R(u)\geqslant\alpha\}$。明显地，$a_\alpha<a\leqslant b<b_\alpha$。又因 $\lim\limits_{u\to-\infty}L(u)=0$并且$\lim\limits_{u\to+\infty}R(u)=0$，所以$a_\alpha$，$b_\alpha$均为有限实数。首先证明 $\underset{\sim}{A}_\alpha=[a_\alpha,\ b_\alpha]$。任取 $u\in[a_\alpha,\ b_\alpha]$，分别处理几种情况。

当着$u\in[a,\ b]$。那么$\underset{\sim}{A}(u)=1\geqslant\alpha$。故$u\in\underset{\sim}{A}_\alpha$。从而$[a,b]\subseteq\underset{\sim}{A}_\alpha$。

当着$u\in(a_\alpha,\ a)$。那么$a>u>\wedge\{u\,|\,L(u)\geqslant\alpha\}$。于是存在着 $u_1<u$ 使 $L(u_1)\geqslant\alpha$。根据 L 的单调增加性，得知 $\underset{\sim}{A}(u)=L(u)\geqslant L(u_1)\geqslant\alpha$。从而$u\in\underset{\sim}{A}_\alpha$。故$(a_\alpha,\ a)\subseteq\underset{\sim}{A}_\alpha$。

当着$u=a_\alpha$。因为$L(u)$右连续，且对 $\forall w\in(a_\alpha,a)$，上面已证明了$L(w)\geqslant\alpha$。于是$\underset{\sim}{A}(a_\alpha)=L(a_\alpha)=\lim\limits_{u\to a_\alpha^+}L(w)\geqslant\alpha$。从而 $a_\alpha\in\underset{\sim}{A}_\alpha$。

这三种情况说明$[a_\alpha, b] \subseteq A_\alpha$。同理可以断言$[b, b_\alpha] \subseteq A_\alpha$。

综合起来说，$[a_\alpha, b_\alpha] \subseteq A_\alpha$。但是这里的等号非成立不可。因为对任何$u \notin [a_\alpha, b_\alpha]$来说，如果$u < a_\alpha = \wedge\{u \mid L(u) \geqslant \alpha\}$，那么$A(u) = L(u) < \alpha$，从而$u \notin A_\alpha$；如果$u > b_\alpha = \vee\{u \mid R(u) \geqslant \alpha\}$，那么$A(u) = R(u) < \alpha$，从而$u \notin A_\alpha$。因此$[a_\alpha, b_\alpha] = A_\alpha$的确成立。

总之，A_α的确是闭凸集。 □

由定理 5 得知，每个 Fuzzy 实数A可由$A_1 = [a, b]$及$L(u)$，$R(u)$唯一确定。记$A = ([a_A, b_A], L_A, R_A)$。

定理6 (Fuzzy 实数表现定理)设映射

$$H: (0, 1] \to \mathscr{I}(\mathbf{R}), \quad \lambda \longmapsto H(\lambda) = [a_\lambda, b_\lambda] \neq \phi,$$

满足条件

$$\alpha < \beta \Longrightarrow [a_\alpha, b_\alpha] \supseteq [a_\beta, b_\beta];$$

又设

$$A = \bigcup_{\lambda \in (0,1]} \lambda H(\lambda).$$

那么以下结论均成立。

(i) A是 Fuzzy 实数。

(ii) 对任何$\lambda \in (0,1]$，有

$$A_\lambda = \bigcap_{n=1}^{+\infty} H(\lambda_n),$$

其中

$$\lambda_n=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\lambda.$$

(iii) $\underset{\sim}{A}=([a_{\underset{\sim}{A}},\ b_{\underset{\sim}{A}}],\ L_{\underset{\sim}{A}},\ R_{\underset{\sim}{A}})$.

其中

$$a_{\underset{\sim}{A}}=\lim_{n\to+\infty}a_{\lambda_n},\quad b_{\underset{\sim}{A}}=\lim_{n\to+\infty}b_{\lambda_n}\quad\left(\lambda_n=1-\frac{1}{n+1}\right);$$

$$L_{\underset{\sim}{A}}(u)=\bigvee_{\lambda\in(0,1)}\{\lambda\,|\,a_\lambda\leqslant u\};$$

$$R_{\underset{\sim}{A}}(u)=\bigvee_{\lambda\in(0,1)}\{\lambda\,|\,b_\lambda\geqslant u\}.$$

证 补充定义$H(0)=\mathbf{R}$，则$\{H(\lambda)\,|\,\lambda\in[0,\ 1]\}$成为$\mathbf{R}$上的集合套，又

$$\underset{\sim}{A}=\bigcup_{\lambda\in(0,1)}\lambda H(\lambda)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda)$$

是$\mathbf{R}$上的一个 Fuzzy 集．根据§2.5 引理 1，对$\lambda\in(0,\ 1]$有

$$\underset{\sim}{A}_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha)=\bigcap_{0<\alpha<\lambda}H(\alpha)=\bigcap_{0<\alpha<\lambda}[a_\alpha,\ b_\alpha].$$

(i) 因为在闭区间套中，闭区间的交仍为闭区间，所以对任何$\lambda\in(0,\ 1]$，$\underset{\sim}{A}_\lambda$仍为区间数；又$\underset{\sim}{A}_1\supseteq H(1)\neq\phi$．于是$\underset{\sim}{A}$是正规闭凸有界 Fuzzy 集，即$\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}^*(\mathbf{R})$。

(ii) 由

$$0<\lambda_n=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\lambda<\lambda$$

得到

$$\underset{\sim}{A}_\lambda=\bigcap_{a<\lambda}H(a)\subseteq\bigcap_{n=1}^{+\infty}H(\lambda_n).$$

反过来仍由§2.5引理1知$H(\lambda_n)\subseteq\underset{\sim}{A}_{\lambda_n}$. 于是

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty}H(\lambda_n)\subseteq\bigcap_{n=1}^{+\infty}\underset{\sim}{A}_{\lambda_n}=\underset{\sim}{A}_{\left(\bigvee_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\right)}=\underset{\sim}{A}_\lambda$$

因此

$$\underset{\sim}{A}_\lambda=\bigcap_{n=1}^{+\infty}H(\lambda_n)\qquad\lambda\in(0,\ 1].$$

(iii) 特别地，对$\lambda=1$，我们有$\lambda_n=1-\frac{1}{n+1}$,

$$\underset{\sim}{A}_1=\bigcap_{n=1}^{+\infty}H(\lambda_n)=\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left[a_{\lambda_n},\ b_{\lambda_n}\right].$$

a_{λ_n}单调增加，b_{λ_n}单调减少，且$a_{\lambda_n}\leqslant a_1\leqslant b_1\leqslant b_{\lambda_n}$. 于是极限

$$a_{\underset{\sim}{A}}=\lim_{n\to+\infty}a_{\lambda_n},\quad b_{\underset{\sim}{A}}=\lim_{n\to+\infty}b_{\lambda_n}$$

均存在，且

$$a_{\lambda_n}\leqslant a_{\underset{\sim}{A}}\leqslant b_{\underset{\sim}{A}}\leqslant b_{\lambda_n}.$$

因此

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left[a_{\lambda_n},\ b_{\lambda_n}\right]=[a_{\underset{\sim}{A}},\ b_{\underset{\sim}{A}}].$$

故

$$\underset{\sim}{A}_1=[a_{\underset{\sim}{A}},\ b_{\underset{\sim}{A}}].$$

当$u<a_{\underset{\sim}{A}}$时，

$$L_{\underset{\sim}{A}}(u)=\underset{\sim}{A}(u)=\bigvee_{\lambda\in(0,1]}[\lambda\wedge H(\lambda)(u)]$$

$$=\bigvee_{\lambda\in(0,1]}\{\lambda|u\in[a_\lambda, b_\lambda]\}$$

$$=\bigvee_{\lambda\in(0,1)}\{\lambda|u\in[a_\lambda, b_\lambda]\}$$

$$=\bigvee_{\lambda\in(0,1)}\{\lambda|a_\lambda\leqslant u\}.$$

当$u>b_{\underset{\sim}{A}}$时，同理推出

$$R_{\underset{\sim}{A}}(u)=\bigvee_{\lambda\in(0,1)}\{\lambda|b_\lambda\geqslant u\}.$$ □

这个定理可用以简化Fuzzy实数的运算.

已知$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}^*(\mathbf{R})$，

$$\underset{\sim}{A}=([a_{\underset{\sim}{A}}, b_{\underset{\sim}{A}}], L_{\underset{\sim}{A}}, R_{\underset{\sim}{A}}),$$

$$\underset{\sim}{B}=([a_{\underset{\sim}{B}}, b_{\underset{\sim}{B}}], L_{\underset{\sim}{B}}, R_{\underset{\sim}{B}}).$$

对$\lambda\in(0, 1]$，令

$$a_{\underset{\sim}{A}_\lambda}=\wedge\{u|L_{\underset{\sim}{A}}(u)\geqslant\lambda\},$$

$$b_{\underset{\sim}{A}_\lambda}=\vee\{u|R_{\underset{\sim}{A}}(u)\geqslant\lambda\};$$

于是$A_\lambda=[a_{\underset{\sim}{A}_\lambda}, b_{\underset{\sim}{A}_\lambda}]$，$\underset{\sim}{B}_\lambda=[a_{\underset{\sim}{B}_\lambda}, b_{\underset{\sim}{B}_\lambda}]$. 对$\mathbf{R}$上的二元运算

$$*:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R},\qquad (u, v)\longmapsto u*v,$$

只要$\{\underset{\sim}{A}_\lambda*\underset{\sim}{B}_\lambda|\lambda\in(0, 1]\}$构成$\mathbf{R}$上的区间数套，那么按照

二元扩展原则而得出的$\underset{\sim}{A}*\underset{\sim}{B}$必为Fuzzy实数。事实上，由§5.2定理3，我们有

$$\underset{\sim}{A}*\underset{\sim}{B}=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda(\underset{\sim}{A}_\lambda*\underset{\sim}{B}_\lambda)$$

$$=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda([a_{\underset{\sim}{A}_\lambda},\ b_{\underset{\sim}{A}_\lambda}]*[a_{\underset{\sim}{B}_\lambda},\ b_{\underset{\sim}{B}_\lambda}]).$$

记

$$[a_{\underset{\sim}{C}_\lambda},\ b_{\underset{\sim}{C}_\lambda}]=[a_{\underset{\sim}{A}_\lambda},\ b_{\underset{\sim}{A}_\lambda}]*[a_{\underset{\sim}{B}_\lambda},\ b_{\underset{\sim}{B}_\lambda}],$$

根据Fuzzy实数表现定理推知，

$$\underset{\sim}{A}*\underset{\sim}{B}=([a_{\underset{\sim}{C}},\ b_{\underset{\sim}{C}}],\ L_{\underset{\sim}{C}},\ R_{\underset{\sim}{C}}).$$

其中

$$a_{\underset{\sim}{C}}=\lim_{n\to+\infty}a_{\underset{\sim}{C}_{\lambda_n}},\quad b_{\underset{\sim}{C}}=\lim_{n\to+\infty}b_{\underset{\sim}{C}_{\lambda_n}}\quad\left(\lambda_n=1-\frac{1}{n+1}\right);$$

$$L_{\underset{\sim}{C}}(u)=\bigvee_{\lambda\in(0,1)}\{\lambda\mid a_{\underset{\sim}{C}_\lambda}\leqslant u\};$$

$$R_{\underset{\sim}{C}}(u)=\bigvee_{\lambda\in(0,1)}\{\lambda\mid b_{\underset{\sim}{C}_\lambda}\geqslant u\}.$$

例3 给定Fuzzy实数$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$。隶属函数示于图3。

$$\underset{\sim}{A}(u)=\begin{cases}0 & u\leqslant 0\\ u & 0<u<1\\ 1 & u=1\\ 2-u & 1<u<2\\ 0 & u\geqslant 2\end{cases},$$

$$
\underset{\sim}{B}(u)=\begin{cases} 0 & u\leqslant 2 \\ u-2 & 2<u<3 \\ 1 & u=3 \\ 4-u & 3<u<4 \\ 0 & u\geqslant 4 \end{cases}.
$$

按照实数乘法的二元扩展计算$\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}=?$

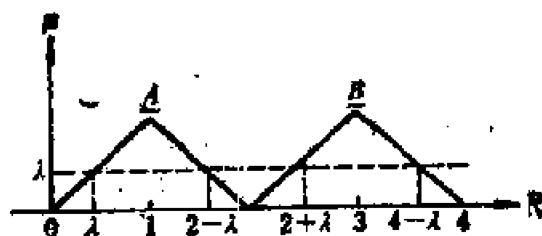


图 3

解　对$\lambda\in(0, 1]$，我们有

$$\underset{\sim}{A}_\lambda=[\lambda, 2-\lambda],$$

$$\underset{\sim}{B}_\lambda=[2+\lambda, 4-\lambda].$$

$$\underset{\sim}{A}_\lambda\cdot\underset{\sim}{B}_\lambda=[2\lambda+\lambda^2, 8-6\lambda+\lambda^2].$$

$\{\underset{\sim}{A}_\lambda\cdot\underset{\sim}{B}_\lambda|\lambda\in(0, 1]\}$明显地是R上的区间数套，因此$\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}^*(\mathrm{R})$。

记

$$a_{\underset{\sim}{C}_\lambda}=2\lambda+\lambda^2,\ b_{\underset{\sim}{C}_\lambda}=8-6\lambda+\lambda^2$$

于是令$\lambda_n=1-\frac{1}{n+1}$，便得出

$$a_{\underset{\sim}{C}}=\lim_{n\to+\infty}(2\lambda_n+\lambda_n^2)=3,$$

$$b_{\underset{\sim}{C}} = \lim_{n\to+\infty}(8-6\lambda_n+\lambda_n^2)=3;$$

$$L_{\underset{\sim}{C}}(u)=\bigvee_{\lambda\in(0,1)}\{\lambda\,|\,2\lambda+\lambda^2\leqslant u\},\qquad u<3$$

$$=\bigvee_{\lambda\in(0,1)}\{\lambda\,|\,\lambda\leqslant-1+\sqrt{u+1}\},\qquad u<3$$

$$=\begin{cases}0 & u\leqslant 0\\ \sqrt{u+1}-1 & 0<u<3;\end{cases}$$

$$R_{\underset{\sim}{C}}(u)=\bigvee_{\lambda\in(0,1)}\{\lambda\,|\,8-6\lambda+\lambda^2\geqslant u\}\qquad u>3$$

$$=\bigvee_{\lambda\in(0,1)}\{\lambda\,|\,\lambda\leqslant 3-\sqrt{u+1}\}\qquad u>3$$

$$=\begin{cases}3-\sqrt{u+1} & 3<u<8\\ 0 & u\geqslant 8.\end{cases}$$

也就是

$$\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}=([3,\ 3],\ \sqrt{u+1}-1(0<u<3),\ 3-\sqrt{u+1}\ (3<u<8)).$$

换言之，Fuzzy 实数 $\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}$ 的隶属函数为

$$(\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B})(u)=\begin{cases}0 & u\leqslant 0\\ \sqrt{u+1}-1 & 0<u<3\\ 1 & u=3\\ 3-\sqrt{u+1} & 3<u<8\\ 0 & u=8\end{cases}$$

定理7 设实数域R上的二元运算 * 可以扩展到 Fuzzy 实数。那么下列结论成立。

(i)　$*$在R上满足交换律 $\Longrightarrow \underset{\sim}{A}*\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}*\underset{\sim}{A}$；

(ii)　$*$在R上满足结合律

$$\Longrightarrow(\underset{\sim}{A}*\underset{\sim}{B})*\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}*(\underset{\sim}{B}*\underset{\sim}{C}).$$

证 (i) 是明显的，我们来证明(ii)。

$$((\underset{\sim}{A}*\underset{\sim}{B})*\underset{\sim}{C})(u)$$

$$=\bigvee_{v*w=u}[(\underset{\sim}{A}*\underset{\sim}{B})(v)\wedge\underset{\sim}{C}(w)]$$

$$=\bigvee_{v*w=u}[(\bigvee_{x*y=v}(\underset{\sim}{A}(x)\wedge\underset{\sim}{B}(y)))\wedge\underset{\sim}{C}(w)]$$

$$=\bigvee_{v*w=u}\bigvee_{x*y=v}[\underset{\sim}{A}(x)\wedge\underset{\sim}{B}(y)\wedge\underset{\sim}{C}(w)]$$

$$=\bigvee_{(x*y)*w=u}[\underset{\sim}{A}(x)\wedge\underset{\sim}{B}(y)\wedge\underset{\sim}{C}(w)]$$

同法算出

$$(\underset{\sim}{A}*(\underset{\sim}{B}*\underset{\sim}{C}))(u)=\bigvee_{x*(y*)w=u}[\underset{\sim}{A}(x)\wedge\underset{\sim}{B}(y)\wedge\underset{\sim}{C}(w)]$$

根据已知条件$(x*y)*w=x*(y*w)$。因此

$$((\underset{\sim}{A}*\underset{\sim}{B})*\underset{\sim}{C})(u)=(\underset{\sim}{A}*(\underset{\sim}{B}*\underset{\sim}{C}))(u)$$

对$\forall u\in$R成立。即

$$(\underset{\sim}{A}*\underset{\sim}{B})*\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}*(\underset{\sim}{B}*\underset{\sim}{C}).$$ □

§5.4 度 集 L

在论域U上，元素u对普通集合A的隶属度$\chi_A(u)$只取值0或1，分别表示$u\notin A$或$u\in A$；u对Fuzzy集合$\underset{\sim}{A}$的隶属度$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$是[0，1]上的一个数，反映$u$能否属于$\underset{\sim}{A}$是模

糊的。更进一步，还可以考虑具有更高一层模糊性的Fuzzy集合$\underset{\approx}{A}$，u对$\underset{\approx}{A}$的隶属度$\mu_{\underset{\approx}{A}}(u)$是[0，1]上的一个Fuzzy集，记作

$$\mu_{\underset{\approx}{A}}: U \to \mathscr{F}([0,1]); \quad u \longmapsto \mu_{\underset{\approx}{A}}(u) \in \mathscr{F}([0,1]).$$

普通集合A的隶属函数χ_A的终域$L_0=\{0, 1\}$，它对运算$\vee$，$\wedge$，^{c}构成一个布尔代数。Fuzzy集合$\underset{\sim}{A}$(也称1型Fuzzy集)的隶属函数$\mu_{\underset{\sim}{A}}$的终域$L_1=[0,1]$，它对运算$\vee$，$\wedge$，^{c}构成一个软代数；在这个软代数中，$(L_1, \leqslant)$是全序集。而Fuzzy集$\underset{\approx}{A}$(称为2型Fuzzy集)的隶属函数$\mu_{\underset{\approx}{A}}$的终域$L_2=\mathscr{F}([0,1])$虽然对运算$\cup$，$\cap$，^{c}仍然构成一个软代数，但$(L_2, \leqslant)$仅仅是偏序集，不再是全序集。下面将讨论层次更高的一般Fuzzy集(称为L型Fuzzy集)，它的隶属函数在某些格$(L, \vee, \wedge)$中取值，并不要求$(L, \leqslant)$是全序集。L称为这个L型Fuzzy集的度集。

首先把§1.5中的完备格定义换一种写法，并引进优格的概念。

定义1 (i) 给定格$(L, \vee, \wedge)$。设对任何非空集$A \subseteq L$存在着

$$\vee\{\alpha | \alpha \in A\} = \operatorname{Sup}\{\alpha | \alpha \in A\} \in L,$$
$$\wedge\{\alpha | \alpha \in A\} = \operatorname{Inf}\{\alpha | \alpha \in A\} \in L;$$

则称这个格为完备格。

(ii) 设完备格$(L, \vee, \wedge)$对任何指标集$T \neq \phi$均满足完备分配律

$$\alpha \wedge (\bigvee_{t \in T} \alpha_t) = \bigvee_{t \in T} (\alpha \wedge \alpha_t),$$

$$\alpha \vee (\bigwedge_{t\in T} \alpha_t) = \bigwedge_{t\in T} (\alpha \vee \alpha_t);$$

则称这个格为完备分配格。

(iii) 设格$(L, \vee, \wedge)$满足：$\forall \alpha, \beta \in L$，$\alpha < \beta$(即$\alpha \leqslant \beta$且$\alpha \neq \beta$)，一定存在$\gamma \in L$使$\alpha < \gamma < \beta$，则称这个格具有稠密性。

定义2 (i) 稠密的完备分配格称为优格。

(ii) 既是优格又是软代数的格叫做优软代数。

优格以及优软代数都不要求$\leqslant$是全序，因此任意两个元素α，β不一定可以比较。今后记

$$\alpha \asymp \beta \Longleftrightarrow \alpha \leqslant \beta \text{或} \alpha \geqslant \beta,$$

$$\alpha \not\asymp \beta \Longleftrightarrow \alpha \nleqslant \beta \text{ 或 } \alpha \ngeqslant \beta$$

$\alpha \asymp \beta$理解为α，β可以比较大小，$\alpha \not\asymp \beta$理解为α，β不可比较大小。第一章、第二章中涉及全序格的许多结论及推理过程，对本节的优格及优软代数将失效。

定理1 给定优格$(L, \vee, \wedge)$，又α_t，$\beta_\gamma \in L$，$t \in T$，$\gamma \in \Gamma$

(i) 如果$\forall t \in T, \exists \gamma_0 \in \Gamma$使$\alpha_t \leqslant \beta_{\gamma_0}$，那么$\bigvee_{t\in T} \alpha_t \leqslant \bigvee_{\gamma\in\Gamma} \beta_\gamma$；

(ii) 如果$\forall \gamma \in \Gamma$，$\exists t_0 \in T$使$\alpha_{t_0} \leqslant \beta_\gamma$，那么$\bigwedge_{t\in T} \alpha_t \leqslant \bigwedge_{\gamma\in\Gamma} \beta_\gamma$；

(iii) $\bigvee_{t\in T} \alpha_t = \bigwedge \{\alpha \mid \alpha \geqslant \alpha_t, \ \forall t \in T\}$；

(iv) $\bigwedge_{t\in T} \alpha_t = \bigvee \{\alpha \mid \alpha \leqslant \alpha_t, \ \forall t \in T\}$；

(v) $\bigvee_{\alpha<\beta}\alpha=\beta$, $\bigwedge_{\alpha>\beta}\alpha=\beta$.

证 (i) 设$\forall t\in T$, $\exists\gamma_0\in\Gamma$使$\alpha_t\leqslant\beta_{\gamma_0}$.

$\Longrightarrow\forall t\in T$, $\alpha_t\leqslant\beta_{\gamma_0}\leqslant\bigvee_{\gamma\in\Gamma}\beta_\gamma$

$\Longrightarrow\bigvee_{t\in T}\alpha_t\leqslant\bigvee_{\gamma\in\Gamma}\beta_\gamma$.

(ii) 同 (i) 类似。

(iii) 记 $\beta=\bigvee_{t\in T}\alpha_t$. 由上确界的定义有$\beta\geqslant\alpha_t$, $\forall t\in T$. 因此$\beta\geqslant\wedge\{\alpha|\alpha\geqslant\alpha_t, \forall t\in T\}$. 另一方面，设 $\alpha\geqslant\alpha_t$, $\forall t\in T$. 仍由上确界的定义得$\alpha\geqslant\beta$. 因此$\wedge\{\alpha|\alpha\geqslant\alpha_t, \forall t\in T\}\geqslant\beta$. 于是

$$\bigvee_{t\in T}\alpha_t=\bigwedge\{\alpha|\alpha\geqslant\alpha_t, \forall t\in T\}.$$

(iv) 同 (iii) 类似。

(v) 显然有$\bigvee_{\alpha<\beta}\alpha\leqslant\beta$。假如等号不成立。由稠密性，存在$\delta$使$\bigvee_{\alpha<\beta}\alpha<\delta<\beta$. 利用右边不等式

$$\delta<\beta\Longrightarrow\bigvee_{\alpha<\beta}\alpha\geqslant\delta$$

与左边不等式矛盾。所以$\bigvee_{\alpha<\beta}\alpha=\beta$.

类似可证余下的等式. □

因为从 (i) 到 (iv) 的证明中并没有用到稠密性，因此这四条性质对完备分配格也成立。

定理2 设 $(L, \vee, \wedge, {}^c)$ 是优软代数. 则

(i) $\alpha<\beta\Longrightarrow\alpha^c>\beta^c$;

(ii) $(\bigvee_{t\in T}\alpha_t)^c=\bigwedge_{t\in T}\alpha_t{}^c$, $(\bigwedge_{t\in T}\alpha_t)^c=\bigvee_{t\in T}\alpha_t{}^c$.

证 (i) 设$\alpha<\beta$.

$\Longrightarrow \alpha\vee\beta=\beta$

$\Longrightarrow \beta^c=(\alpha\vee\beta)^c=\alpha^c\wedge\beta^c$

$\Longrightarrow \alpha^c\geqslant\beta^c$.

又因为 $\alpha\neq\beta$，所以 $\alpha^c\neq\beta^c$。(否则由 $\alpha^c=\beta^c$ 推出 $\alpha=\alpha^{cc}=\beta^{cc}=\beta$) 于是 $\alpha^c>\beta^c$.

(ii) 明显地 $\bigvee_{t\in T}\alpha_t\geqslant\alpha_t$ $(\forall t\in T)$

$\Longrightarrow(\bigvee_{t\in T}\alpha_t)^c\leqslant\alpha_t{}^c$ $(\forall t\in T)$

$\Longrightarrow(\bigvee_{t\in T}\alpha_t)^c\leqslant\bigwedge_{t\in T}\alpha_t{}^c$

另一方面，$\bigwedge_{t\in T}\alpha_t{}^c\leqslant\alpha_t{}^c$，$(\forall t\in T)$

$\Longrightarrow(\bigwedge_{t\in T}\alpha_t{}^c)^c\geqslant\alpha_t$ $(\forall t\in T)$

$\Longrightarrow(\bigwedge_{t\in T}\alpha_t{}^c)^c\geqslant\bigvee_{t\in T}\alpha_t$

$\Longrightarrow\bigwedge_{t\in T}\alpha_t{}^c\leqslant(\bigvee_{t\in T}\alpha_t)^c$

所以$(\bigvee_{t\in T}\alpha_t)^c=\bigwedge_{t\in T}\alpha_t{}^c$.

又由于$(\bigvee_{t\in T}\alpha_t{}^c)^c=\bigwedge_{t\in T}(\alpha_t{}^c)^c=\bigwedge_{t\in T}\alpha_t$。因此

$(\bigwedge_{t\in T}\alpha_t)^c=\bigvee_{t\in T}\alpha_t{}^c$. □

§5.5 L型Fuzzy集

定义1 设U为论域，度集L为优格。L型Fuzzy集A_L是指映射

$$A_L: U \to L, \quad u \longmapsto A_L(u) \in L.$$

$A_L(u)$称为元素u对L型Fuzzy集A_L的隶属度。由U上的所有L型Fuzzy集构成的集记作$\mathscr{F}_L(U)$。

定义2 在$\mathscr{F}_L(U)$中规定运算$\cup$，$\cap$如下：

$$A_L \cup B_L: (A_L \cup B_L)(u) = A_L(u) \vee B_L(u),$$

$$A_L \cap B_L: (A_L \cap B_L)(u) = A_L(u) \wedge B_L(u),$$

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_L^{(\gamma)}: (\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_L^{(\gamma)})(u) = \bigvee_{\gamma \in \Gamma} A_L^{(\gamma)}(u),$$

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_L^{(\gamma)}: (\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_L^{(\gamma)})(u) = \bigwedge_{\gamma \in \Gamma} A_L^{(\gamma)}(u).$$

由于度集$(L, \vee, \wedge)$没有定义补运算，因此$\mathscr{F}_L(U)$也没有定义补运算。又由于$\cup$，$\cap$的隶属函数是按u逐个元素定义的，且对每个u，在运算公式中不涉及其它元素的隶属度，因此度集L的运算性质遗传给$\mathscr{F}_L(U)$，于是$(\mathscr{F}_L(U), \cup, \cap)$构成优格。

在$\mathscr{F}_L(U)$中定义关系$\subseteq$：

$$A_L \subseteq B_L \Longleftrightarrow A_L(u) \leqslant B_L(u) \qquad (\forall u \in U)$$

显然$\subseteq$是偏序，且按$\subseteq$确定的上、下确界满足

$$\operatorname{Sup}\{A_L, B_L\} = A_L \cup B_L, \quad \operatorname{Inf}\{A_L, B_L\} = A_L \cap B_L$$

$$\underset{\sim}{A}_L \subseteq \underset{\sim}{B}_L \Longleftrightarrow \underset{\sim}{A}_L \cup \underset{\sim}{B}_L = \underset{\sim}{B}_L \Longleftrightarrow \underset{\sim}{A}_L \cap \underset{\sim}{B}_L = \underset{\sim}{A}_L.$$

现在说明 L 型 Fuzzy 集的截集及其性质。为简便计把 $\underset{\sim}{A}_L$ 简写为 $\underset{\sim}{A}$。

定义3 设 $\underset{\sim}{A} \in \mathscr{F}_L(U)$，$\lambda \in L$。记

$$A_\lambda = \{u \mid \underset{\sim}{A}(u) \geqslant \lambda\}, \quad A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \{u \mid \underset{\sim}{A}(u) > \lambda\}.$$

称 A_λ 为 $\underset{\sim}{A}$ 的 λ-截集，$A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 为 $\underset{\sim}{A}$ 的 λ-强截集。

性质1 $(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B})_\lambda \supseteq A_\lambda \cup B_\lambda$，$(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B})_\lambda = A_\lambda \cap B_\lambda$，

$(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B})_{\underset{\cdot}{\lambda}} \supseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \cup B_{\underset{\cdot}{\lambda}}$，$(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B})_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \cap B_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B})_\lambda$。

性质2

$$\Big(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \underset{\sim}{A}^{(\gamma)}\Big)_\lambda \supseteq \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\lambda^{(\gamma)},$$

$$\Big(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \underset{\sim}{A}^{(\gamma)}\Big)_\lambda = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\lambda^{(\gamma)},$$

$$\Big(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \underset{\sim}{A}^{(\gamma)}\Big)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \supseteq \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(\gamma)},$$

$$\Big(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \underset{\sim}{A}^{(\gamma)}\Big)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_{\underset{\cdot}{\lambda}}^{(\gamma)} \subseteq \Big(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \underset{\sim}{A}^{(\gamma)}\Big)_\lambda.$$

性质3 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq A_\lambda$。

性质4 $\alpha < \beta \Longrightarrow A_\alpha \supseteq A_\beta$，$A_{\underset{\cdot}{\alpha}} \supseteq A_{\underset{\cdot}{\beta}}$。

性质5 $A_{\bigvee\limits_{t \in T} \lambda_t} = \bigcap\limits_{t \in T} A_{\lambda_t}$，$A_{\underset{\cdot}{\bigwedge\limits_{t \in T} \lambda_t}} \supseteq \bigcup\limits_{t \in T} A_{\underset{\cdot}{\lambda_t}}$。

性质6 $\underset{\sim}{A}_0=U$，$\underset{\sim}{A}_{\dot{1}}=\phi$。

称 $\underset{\sim}{A}_{\dot{0}}=\{u|\underset{\sim}{A}(u)>0\}$为$\underset{\sim}{A}$的支承，记作$\mathrm{Supp}\underset{\sim}{A}$。称$\underset{\sim}{A}_1=\{u|\underset{\sim}{A}(u)=1\}$为$\underset{\sim}{A}$的核，记作$\mathrm{Ker}\underset{\sim}{A}$。$\underset{\sim}{A}_0\backslash\underset{\sim}{A}_1=\{u|0<\underset{\sim}{A}(u)<1\}$称为$\underset{\sim}{A}$的边界，记作$\mathrm{Bdry}\,\underset{\sim}{A}$。$\underset{\sim}{A}_\lambda\backslash\underset{\sim}{A}_{\dot{\lambda}}=\{u|\underset{\sim}{A}(u)=\lambda\}$称为$\underset{\sim}{A}$的水平割线，记作$\underset{\sim}{A}_{\underline{\lambda}}$。

在性质1中，$(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})_\lambda\supseteq\underset{\sim}{A}_\lambda\cup\underset{\sim}{B}_\lambda$与$(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})_{\dot{\lambda}}\supseteq\underset{\sim}{A}_{\dot{\lambda}}\cup\underset{\sim}{B}_{\dot{\lambda}}$是包含关系而非相等关系，这与1型Fuzzy集的截集是有区别的，原因在于L中的$\leqslant$不一定是全序，故等号不一定成立。举例说明如下。

例1 设论域$U=\{u_1, u_2\}$，度集$(L,\vee,\wedge,^c)=(\mathscr{F}(0,1],\cup,\cap,^c)$。令

$$\underset{\sim}{A}=a_1/u_1+a_2/u_2,\qquad \underset{\sim}{B}=b_1/u_1+b_2/u_2;$$

$$a_1=b_2=\frac{0.8}{0.5}+\frac{0.2}{1},\ a_2=b_1=\frac{0.2}{0.5}+\frac{0.8}{1}.$$

显然a_1，a_2，b_1，$b_2\in\mathscr{F}([0,1])$，$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}_L(U)$。取$\lambda=\frac{0.7}{0.5}+\frac{0.7}{1}\in\mathscr{F}([0,1])$。由于$a_1=b_2\not\supseteq\lambda$，$b_1=a_2\not\supseteq\lambda$，所以

$$\underset{\sim}{A}_\lambda=\underset{\sim}{B}_\lambda=\phi.$$

又因为

$$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}=a_1\cup b_1/u_1+a_2\cup b_2/u_2,$$

$$a_1\cup b_1=a_2\cup b_2=\frac{0.8}{0.5}+\frac{0.8}{1}\supset\lambda,$$

于是

$$(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})_\lambda=U\supset\underset{\sim}{A}_\lambda\cup\underset{\sim}{B}_\lambda.$$

定义4 设$\lambda\in L$，$\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}_L(U)$。规定乘积$\lambda\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}_L(U)$

$$(\lambda\underset{\sim}{A})(u)=\lambda\wedge\underset{\sim}{A}(u).$$

下列性质显然成立

(1) $\lambda(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})=\lambda\underset{\sim}{A}\cup\lambda\underset{\sim}{B}$，$\lambda(\bigcup\limits_{t\in T}\underset{\sim}{A}^{(t)})=\bigcup\limits_{t\in T}\lambda\underset{\sim}{A}^{(t)}$；

(2) $\lambda(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})=\lambda\underset{\sim}{A}\cap\lambda\underset{\sim}{B}$，$\lambda(\bigcup\limits_{t\in T}\underset{\sim}{A}^{(t)})=\bigcap\limits_{t\in T}\lambda\underset{\sim}{A}^{(t)}$；

(3) $(\alpha\vee\beta)\underset{\sim}{A}=\alpha\underset{\sim}{A}\cup\beta\underset{\sim}{A}$，$(\alpha\wedge\beta)\underset{\sim}{A}=\alpha\underset{\sim}{A}\cap\beta\underset{\sim}{A}$；

(4) $\alpha\leqslant\beta\Longrightarrow\alpha\underset{\sim}{A}\subseteq\beta\underset{\sim}{A}$；

(5) $\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}\Longleftrightarrow\lambda\underset{\sim}{A}\subseteq\lambda\underset{\sim}{B}$。

定理1 设$\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}_L(U)$，$L$为优格。则有

(i) 第一分解定理：$\underset{\sim}{A}=\bigcup\limits_{\lambda\in L}\lambda\underset{\sim}{A}_\lambda$，

(ii) 第二分解定理：$\underset{\sim}{A}=\bigcup\limits_{\lambda\in L}\lambda\underset{\sim}{A}_{\underset{\cdot}{\lambda}}$。

证 往证第二分解定理，即证等式

$$\underset{\sim}{A}(u)=\bigvee_{\lambda\in L}[\lambda\wedge\underset{\sim}{A}_{\underset{\cdot}{\lambda}}(u)].$$

事实上

$$\bigvee_{\lambda\in L}[\lambda\wedge\underset{\sim}{A}_{\underset{\cdot}{\lambda}}(u)]=\bigvee_{\lambda\in L}\{\lambda\mid u\in\underset{\sim}{A}_{\underset{\cdot}{\lambda}}\}$$

$$=\bigvee_{\lambda\in L}\{\lambda\mid,\ \underset{\sim}{A}(u)>\lambda\}\leqslant\underset{\sim}{A}(u)$$

假如等号不成立。由稠密性，存在$\delta\in L$使

$$\bigvee_{\lambda\in L}[\lambda\wedge \underset{\sim}{A}_{\underset{\cdot}{\lambda}}(u)]<\delta<\underset{\sim}{A}(u)$$

利用右边的不等式知 $u\in \underset{\sim}{A}_{\underset{\cdot}{\delta}}$ 。故

$$\bigvee_{\lambda\in L}\{\lambda\,|u\in \underset{\sim}{A}_{\underset{\cdot}{\lambda}}\}\geqslant\delta$$

即$\bigvee_{\lambda\in L}[\lambda\wedge \underset{\sim}{A}_{\underset{\cdot}{\lambda}}(u)]\geqslant\delta$。这与左边的不等式矛盾。所以

$$\underset{\sim}{A}(u)=\bigvee_{\lambda\in L}[\lambda\wedge \underset{\sim}{A}_{\underset{\cdot}{\lambda}}(u)]。$$

类似地证明第一分解定理。 □

如果度集 L 是完备分配格，则 $\bigvee_{\lambda\in L}\{\lambda|\ \underset{\sim}{A}(u)>\lambda\}\leqslant \underset{\sim}{A}(u)$，式中的等号不一定成立。此时第二分解定理应修改为

$$\underset{\sim}{A}\supseteq\bigcup_{\lambda\in L}\lambda \underset{\sim}{A}_{\underset{\cdot}{\lambda}}\ 。$$

定理2 （第三分解定理）。设 $\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}_L(U)$，度集 L 为优格。令

$$H:L\to\mathscr{P}(U),\ \ \lambda\longmapsto H(\lambda)$$

满足条件

$$\underset{\sim}{A}_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq H(\lambda)\subseteq \underset{\sim}{A}_{\lambda}\qquad(\forall\lambda\in L)。$$

则以下结论均成立

(i) $\underset{\sim}{A}=\bigcup_{\lambda\in L}\lambda H(\lambda)$；

(ii) $\alpha<\beta\Longrightarrow H(\alpha)>H(\beta)$；

(iii) $\underset{\sim}{A}_{\alpha}=\bigcap_{\lambda<\alpha}H(\lambda)\qquad(\alpha\neq0)$，

$\underset{\sim}{A}_{\underset{\cdot}{\alpha}}=\bigcup_{\lambda>\alpha}H(\lambda)\qquad(\alpha\neq1)$；

(iv) $\bigcap_{t\in T} H(\lambda_t)\subseteq\bigcap\{H(\lambda)\mid\lambda<\bigvee_{t\in T}\lambda_t\}$。

证(i) 由已知条件 $\underset{\cdot}{A}_\lambda\subseteq H(\lambda)\subseteq A_\lambda$ ($\forall\lambda\in L$)推出

$$A=\bigcup_{\lambda\in L}\lambda \underset{\cdot}{A}_\lambda\subseteq\bigcup_{\lambda\in L}\lambda H(\lambda)\subseteq\bigcup_{\lambda\in L}\lambda A_\lambda=A。$$

(ii) 由 $\alpha<\beta$ 推出

$$H(\alpha)\supseteq \underset{\cdot}{A}_\alpha\supseteq A_\beta\supseteq H(\beta)。$$

(iii) 设 $\alpha\neq 0$。对 $\forall\lambda<\alpha$，有 $H(\lambda)\supseteq \underset{\cdot}{A}_\lambda\subseteq \underset{\cdot}{A}_\alpha$ 。因此

$$\bigcap_{\lambda<\alpha}H(\lambda)\supseteq A_\alpha 。$$

另一方面，$\bigcap_{\lambda<\alpha}H(\lambda)\subseteq\bigcap_{\lambda<\alpha}A_\lambda=A_{\bigvee_{\lambda<\alpha}\lambda}$。根据 §5.4 定理 1 之 (iii) 以及度集 L 的稠密性，我们有 $\bigvee_{\lambda<\alpha}\lambda=\alpha$。故

$$\bigcap_{\lambda<\alpha}H(\lambda)\subseteq A_\alpha 。$$

因此

$$A_\alpha=\bigcap_{\lambda<\alpha}H(\lambda)。\qquad(\alpha\neq 0)$$

设 $\alpha\neq 1$，对 $\forall\lambda>\alpha$，有 $\underset{\cdot}{A}_\alpha\supseteq A_\lambda\supseteq H(\lambda)$。

因此

$$\underset{\cdot}{A}_\alpha\supseteq\bigcup_{\lambda>\alpha}H(\lambda)。$$

另一方面，任取 $u\in \underset{\cdot}{A}_\alpha$ ，有 $A(u)>\alpha$。利用稠密性，存在 $\beta\in L$ 使 $A(u)>\beta>\alpha$。于是 $u\in \underset{\cdot}{A}_\beta\subseteq H(\beta)\subseteq\bigcup_{\lambda>\alpha}H(\lambda)$ 。可见 $\underset{\cdot}{A}_\alpha\subseteq\bigcup_{\lambda>\alpha}H(\lambda)$。因此

$$\underset{\sim}{A}_{\underset{\cdot}{\alpha}} = \bigcup_{\lambda>\alpha} H(\lambda).$$

(iv) $$\bigcap_{t\in T} H(\lambda_t) \subseteq \bigcap_{t\in T} \underset{\sim}{A}_{\lambda_t} = \underset{\sim}{A}_{\bigvee_{t\in T}\lambda_t}$$

$$= \bigcap\{H(\lambda) \mid \lambda < \bigvee_{t\in T}\lambda_t\}. \qquad \square$$

以前曾约定 $\bigcap_{\phi} = U$，$\bigcup_{\phi} = \phi$，所以

$$\underset{\sim}{A}_0 = U = \bigcap_{\lambda\in\phi} H(\lambda) = \bigcap_{\lambda<0} H(\lambda),$$

$$\underset{\sim}{A}_{\underset{\cdot}{1}} = \phi = \bigcup_{\lambda\in\phi} H(\lambda) = \bigcup_{\lambda>1} H(\lambda).$$

于是定理 2 中关于 $\alpha\neq 0$ 或 $\alpha\neq 1$ 的条件可以删去。这种约定与在 L 中约定 $\bigwedge_{\phi} = 1$，$\bigvee_{\phi} = 0$ 类似

推论 1 给定 $H: L \to \mathscr{P}(U)$，$\lambda \longmapsto H(\lambda)$ 满足

$$\underset{\sim}{A}_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq \underset{\sim}{A}_{\lambda} \qquad (\lambda\in L).$$

设 α※β。则 $H(\alpha)\cap H(\beta) = \underset{\sim}{A}_{\alpha\vee\beta}$.

证 由于 α※β

$\Longrightarrow \alpha < \alpha\vee\beta$ 且 $\beta < \alpha\vee\beta$

$\Longrightarrow H(\alpha) \supseteq \underset{\sim}{A}_{\underset{\cdot}{\alpha}} \supseteq \underset{\sim}{A}_{\alpha\vee\beta}$ 且 $H(\beta) \supseteq A_{\underset{\cdot}{\beta}} \supseteq \underset{\sim}{A}_{\alpha\vee\beta}$

$\Longrightarrow H(\alpha)\cap H(\beta) \supseteq \underset{\sim}{A}_{\alpha\vee\beta}$.

另一方面，根据第三分解定理之(iv)及(iii)有

$$H(\alpha)\cap H(\beta) \subseteq \bigcap\{H(\lambda) \mid \lambda < \alpha\vee\beta\} = \underset{\sim}{A}_{\alpha\vee\beta}$$

所以

$$H(\alpha)\cap H(\beta) = \underset{\sim}{A}_{\alpha\vee\beta}. \qquad \square$$

推论2 设$\bigvee_{t\in T}\lambda_t$不可达（即$\forall t\in T$，恒有$\lambda_t<\bigvee_{t\in T}\lambda_t$）。则

$$\bigcap_{t\in T}H(\lambda_t)=A_{\bigvee_{t\in T}\lambda_t}.$$

证 根据已知条件，对$\forall t\in T$恒有$\lambda_t<\bigvee_{t\in T}\lambda_t$。于是得到$A_{\bigvee_{t\in T}\lambda_t}\subseteq A_{\lambda_t}\subseteq H(\lambda_t)$。因而$A_{\bigvee_{t\in T}\lambda_t}\subseteq\bigcap_{t\in T}H(\lambda_t)$。

另一方面，利用第三分解定理之(iv)及(iii)得

$$\bigcap_{t\in T}H(\lambda_t)\subseteq\bigcap\{H(\lambda)\mid\lambda<\bigvee_{t\in T}\lambda_t\}=A_{\bigvee_{t\in T}\lambda_t}.$$

所以

$$\bigcap_{t\in T}H(\lambda_t)=A_{\bigvee_{t\in T}\lambda_t}.$$ □

第三分解定理之（iii）及推论1共同说明了映射$H:L\to\mathscr{P}(U)$的性质：对任何α，$\beta\in L$，如果α，β可以比较，则由$\alpha<\beta$知$H(\alpha)\supseteq H(\beta)$；如果$\alpha$，$\beta$不可比较，则$H(\alpha)\cap H(\beta)=A_{\alpha\vee\beta}$。

下面谈谈L型Fuzzy集的补运算。为了在$\mathscr{F}_L(U)$中定义补运算，先决条件是在度集L中建立补运算，因此要求度集（L，$\vee$，$\wedge$，^{c}）是一个优软代数。

定义5 设度集L为优软代数。在$\mathscr{F}_L(U)$中规定补运算^c。令A^c的隶属函数满足

$$A^c(u)=(A(u))^c$$

显然补运算满足复原律及对偶律。因此（$\mathscr{F}_L(U)$，$\cup$，$\cap$，^{c}）也构成一个优软代数。关于补集的截集，我们有

性质7 $(A^c)_\lambda=(A_{\lambda^c})^c\cap(\bigcup\limits_{\alpha\divideontimes\lambda^c}A_{\underline{\alpha}})^c$；

$$(A^c)_{\underset{\cdot}{\lambda}}=(A_{\lambda^c})^c\cap(\bigcap\limits_{\alpha\divideontimes\lambda^c}A_{\alpha})^c \quad .$$

证 $u\in((A^c)_\lambda)^c$

$\Longleftrightarrow u\notin(A^c)_\lambda$

$\Longleftrightarrow A^c(u)=(A(u))^c\not\geq\lambda$

$\Longleftrightarrow A(u)\not\leq\lambda^c$

$\Longleftrightarrow A(u)>\lambda^c$ 或 $A(u)=\alpha\divideontimes\lambda^c$

$\Longleftrightarrow u\in A_{\underset{\cdot}{\lambda^c}}$ 或 $u\in\bigcup\limits_{\alpha\divideontimes\lambda^c}A_{\underline{\alpha}}$

$\Longleftrightarrow u\in A_{\lambda^c}\cup(\bigcup\limits_{\alpha\divideontimes\lambda^c}A_{\underline{\alpha}})$

因此，

$$(A^c)_\lambda=(A_{\underset{\cdot}{\lambda^c}})^c\cap(\bigcup\limits_{\alpha\divideontimes\lambda^c}A_{\underline{\alpha}})^c .$$

这就是第一个等式。同法证明第二个等式。 □

§ 5.6 高型Fuzzy集

在§5.4中，已经介绍过2型Fuzzy集，它比第二章所阐述的Fuzzy集具有更高层次的模糊性。我们还可以进一步定义高型Fuzzy集。

令 $L_0=\{0,1\}$，$(L_0,\vee,\wedge,{}^c)$是布尔代数，它作为普通集的度集。

令 $L_1=[0,1]$，$(L_1,\vee,\wedge,{}^c)$是具有全序性的优软

代数，它作为1型Fuzzy集的度集。

令 $L_2=\mathscr{F}_{L_1}([0,1])$。$(L_2,\vee,\wedge,^c)=(\mathscr{F}_{L_1}([0,1]),\cup,\cap,^c)$是优软代数，它作为2型Fuzzy集的度集。

进一步，令 $L_3=\mathscr{F}_{L_2}([0,1])$。$(L_3,\vee,\wedge,^c)=(\mathscr{F}_{L_2}([0,1]),\cup,\cap,^c)$ 是优软代数，它作为3型Fuzzy集的度集。

如此等等。L_2，L_3，…都是优软代数。以它们当中的任一个作度集的Fuzzy集统称高型Fuzzy集。于是我们有

$\mathscr{F}_{L_0}(U)=\mathscr{P}(U)$ 为包含所有普通集合的集。

$\mathscr{F}_{L_1}(U)=\mathscr{F}(U)$为包含所有1型Fuzzy集的集。

$\mathscr{F}_{L_2}(U)$为包含所有2型Fuzzy集的集。

……

由于 $L_1\supseteq L_0$，$L_2=\mathscr{F}_{L_1}([0,1])\supseteq L_1$，$L_3=\mathscr{F}_{L_2}([0,1])\supseteq\mathscr{F}_{L_1}([0,1])=L_2$，…于是 $L_0\subseteq L_1\subseteq L_2\subseteq L_3\subseteq\cdots$。因此

$$\mathscr{F}_{L_0}(U)\subseteq\mathscr{F}_{L_1}(U)\subseteq\mathscr{F}_{L_2}(U)\subseteq\cdots,$$

所以较低型的Fuzzy集都是较高型的Fuzzy集的特殊情形。另外由于 $L_m(m=2,3,\cdots)$ 都是优软代数，因此 L 型Fuzzy集的分解定理对高型Fuzzy集也有效。

例1　设 $U=\{u_1,u_2,u_3\}$ 上的2型Fuzzy集 $\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$的隶属度分别为

$$\underset{\sim}{A}(u_1)=\frac{0.3}{0.1},\quad \underset{\sim}{A}(u_2)=\frac{0.4}{0.2},\quad \underset{\sim}{A}(u_3)=\frac{0.5}{0.6}+\frac{1}{0.7},$$

$$\underset{\sim}{B}(u_1)=\frac{0.1}{0.4},\quad \underset{\sim}{B}(u_2)=\frac{0.2}{0.5}+\frac{0.3}{0.6},\quad \underset{\sim}{B}(u_3)=\frac{1}{0.8}.$$

计算隶属度$(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})(u)$，$(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})(u)$，$\underset{\sim}{A}^c(u)$。

先看$(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})(u)$。2型Fuzzy集是$L$型Fuzzy集的一种；根据§5.5定义2所规定的运算∪，我们有

$$(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})(u)=\underset{\sim}{A}(u)\vee\underset{\sim}{B}(u).$$

其中$\underset{\sim}{A}(u)$，$\underset{\sim}{B}(u)$是U上的1型Fuzzy集。根据二元扩展原则，

$$\underset{\sim}{A}(u)\vee\underset{\sim}{B}(u)=\int_{[0,1]}\bigvee_{x\vee y=z}[\underset{\sim}{A}(u)(x)\wedge\underset{\sim}{B}(u)(y)]/z.$$

于是

$$(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})(u_1)=\int_{[0,1]}\bigvee_{x\vee y=z}[\underset{\sim}{A}(u_1)(x)\wedge\underset{\sim}{B}(u_2)(y)]/z$$

$$=\frac{0.3\wedge0.1}{0.4}=\frac{0.1}{0.4},$$

$$(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})(u_2)=\int_{[0,1]}\bigvee_{x\vee y=z}[\underset{\sim}{A}(u_2)(x)\wedge\underset{\sim}{B}(u_2)(y)]/z$$

$$=\frac{0.4\wedge0.2}{0.5}+\frac{0.4\wedge0.3}{0.6}=\frac{0.2}{0.5}+\frac{0.3}{0.6},$$

$$(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})(u_3)=\int_{[0,1]}\bigvee_{x\vee y=z}[\underset{\sim}{A}(u_3)(x)\wedge\underset{\sim}{B}(u_3)(y)]/z$$

$$=\frac{(0.5\wedge1)\vee(1\wedge1)}{0.8}=\frac{1}{0.8}.$$

同理有

$$(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})(u_1)=\frac{0.1}{0.1}\qquad(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})(v_2)=\frac{0.3}{0.2}$$

$$(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})(u_3)=\frac{0.5}{0.6}+\frac{1}{0.7}$$

此外，根据§5.5定义5的补运算以及扩展原则，有

$$A^c(u)=(\underset{\sim}{A}(u))^c=\int_{[0,1]}\bigvee_{x^c=z}\underset{\sim}{A}(u)(x)/z$$

$$=\int_{[0,1]}A(u)(1-z)/z \text{ .}$$

于是

$$A^c(u_1)=\frac{A(u_1)(0.1)}{0.9}=\frac{0.3}{0.9},$$

$$\underset{\sim}{A}^c(u_2)=\frac{A(u_2)(0.2)}{0.8}=\frac{0.4}{0.8},$$

$$A^c(u_3)=\frac{A(u_3)(0.6)}{0.4}+\frac{A(u_3)(0.7)}{0.3}$$

$$=\frac{0.5}{0.4}+\frac{1}{0.3} \text{ .}$$

第六章 Fuzzy推理

§6.1 自然语言的集合描述

人们在日常生活中所用的自然语言和计算机所能理解的形式语言，差异甚大．自然语言的重要特点是它具有模糊性．人们既用缺乏精确定义的词汇构成句子，也用带有二义性的句子表达思想．但这些并不影响人与人之间的信息交流．恰恰相反，正是词汇和句子的模糊性使自然语言充满表现力．形式语言则严谨精密有余，灵活机动不足．要想让计算机更多地代替人脑执行思维、推理、判断的任务，必须令部分自然语言定量化和数学化，为部分自然语言直接进入计算机程序开辟道路，扎德第一个用Fuzzy集表示自然语言．以下是描述自然语言系统的数学框架．

在自然语言系统中，单词是表达最基本的、不可再分解的概念的最小单位．例如牛、马、黑、白、长、短、快、慢等等都是单词．每个单词表达一定的意义，叫做这个单词的词义．单词 a的词义记着 $[a]$．有些单词的词义是确切的，例如[牛]，它是由现实世界U中的所有牛构成的普通集合，[牛] $\in \mathscr{P}(U)$．有些单词的词义是模糊的，例如[快]，它是U上Fuzzy集，[快] $\in \mathscr{F}(U) \backslash \mathscr{P}(U)$．

在两个词之间添加中缀或、且，在一个单词前面添加前缀非，这样便成为词组．词组的词义按自然语言的规律导出．例如

[鱼虾] = [鱼或虾] = [鱼] $\cup$ [虾]；

[老牛] = [牛且老] = [牛] $\cap$[老]；

[非金属]=[金属]^c.

这样，我们不但可以由单词构成词组，也可以把词组分解为单词.今后，单词与词组统称为词.

在自然语言系统中，为了调整一个词的词义，常在这个词的前面添加很、极、略、微、相当、比较、大约、近似、偏向、多半等前缀.这些前缀把一个词变换为另一个词，因此是作用于Fuzzy集的算子.算子因功能不同而分成几类.

（1） 语气算子．语气算子可以表达词义中的肯定程度.加强语气的叫做集中化算子，减弱语气中的叫做松散化算子．语气算子的集合表示为

$$H_\lambda: \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(U), \quad A \longmapsto H_\lambda(A); \ \lambda > 0.$$

其中

$$H_\lambda(A)(u) = (A(u))^\lambda$$

当$\lambda>1$时，H_λ成为集中化算子．当$\lambda<1$时，H_λ成为松散化算子．例如

$$极 = H_4,$$

$$很 = H_2,$$

$$相当 = H_{1.5};$$

$$比较 = H_{2/3},$$

$$略 = H_{1/2},$$

$$微 = H_{1/4}.$$

例1　在论域$U=(0,+\infty)$上，设单词老的词义［老］$\in \mathscr{F}(U)$，

$$[老](u)=S(u;\ 50,70)$$

$$=\begin{cases} 0 & u\leqslant 50 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{u-50}{10}\right)^2 & 50<u\leqslant 60 \\ 1-\frac{1}{2}\left(\frac{70-u}{10}\right)^2 & 60<u\leqslant 70 \\ 1 & u>70 \end{cases}$$

于是

$$[相当老](u)=H_{1.5}([老])(u)=([老](u))^{1.5}$$

$$=(S(u;\ 50,70))^{1.5}$$

$$=\begin{cases} 0 & u\leqslant 50 \\ \left(\frac{1}{2}\left(\frac{u-50}{10}\right)^2\right)^{1.5} & 50<u\leqslant 60 \\ \left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{70-u}{10}\right)^2\right)^{1.5} & 60<u\leqslant 70 \\ 1 & u>70 \end{cases}$$

$$[比较老](u)=H_{\frac{2}{3}}([老])(u)=([老](u))^{\frac{2}{3}}$$

$$=\left(S(u;\ 50,70)\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$=\begin{cases} 0 & u\leqslant 50 \\ \left(\frac{1}{2}\left(\frac{u-50}{10}\right)^2\right)^{\frac{2}{3}} & 50<u\leqslant 60 \\ \left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{u-70}{10}\right)^2\right)^{\frac{2}{3}} & 60<u\leqslant 70 \\ 1 & u>70 \end{cases}$$

显然[相当老]$(u)\leqslant$[老](u)，说明U对[相当老]的隶属度低于对[老]的隶属度，反映了相当是集中化算子．同样，[比较老]$(u)\geqslant$[老](u)，反映了比较是松散化算子．

应该指出，语气算子只对模糊概念起作用，对确切概念不起作用，这是因为对普通集合$A\in\mathscr{P}(U)$来说，由于$A(u)\in\{0,1\}$，因此

$$H_\lambda(A)(u)=(A(u))^\lambda=A(u)\ .$$

（2） 模糊化算子．在一个词前面添加大约、近似这一类前缀可以使确切的词义模糊化，或使模糊化的词义更加模糊化．这一类前缀叫模糊化算子．其集合表示为

$$F:\mathscr{F}(U)\to\mathscr{F}(U),\quad A\longmapsto F(A)$$

为了计算F(A)，通常选定U上的Fuzzy相似关系$E\in\mathscr{F}(U\times U)$，并令$F(A)=A\circ E$即

$$F(A)(u)=\bigvee_{v\in U}[A(v)\wedge E(v,u)].$$

例2 [3]是实数域R上的普通集

$$[3](u)=\begin{cases}1 & \text{当}u=3,\\ 0 & \text{当}u\neq 3.\end{cases}$$

给定R上的Fuzzy相似关系E

$$E(v,u)=\begin{cases}e^{-(v-u)^2} & \text{当}|v-u|<\delta,\\ 0 & \text{当}|v-u|\geqslant\delta.\end{cases}$$

[大约3]是将普通集[3]模糊化而得的Fuzzy集．利用E计算u对[大约3]的隶属度

$$[\text{大约}3](u)=\bigvee_{v\in \mathrm{R}}([3](v)\wedge E(v,u))=E(3,u).$$

如图1所示.

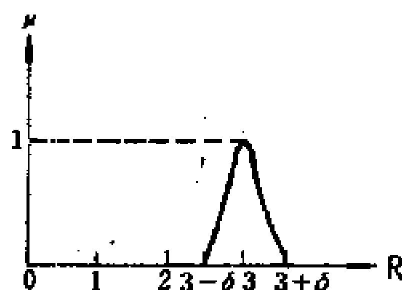


图1

(3) 判定化算子. 在一个词前面添加偏向、多半这一类前缀，能对模糊的词义作出粗糙的判断. 这一类前缀叫做判定化算子，其集合表示为

$$P_a: \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(U), \quad A \longmapsto P_a(A); \quad a \in (0, \tfrac{1}{2}].$$

其中

$$P_a(A)(u) = \begin{cases} 0 & \text{当 } A(u) \leqslant a \\ 1/2 & \text{当 } a < A(u) \leqslant 1-a \\ 1 & \text{当 } A(u) > 1-a \end{cases}$$

特别地$P_{1/2}$起名为偏向.

例3 仍设 Fuzzy 集〔老〕的隶属度为

$$〔老〕(u) = \begin{cases} 0 & u \leqslant 50 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{u-50}{10}\right)^2 & 50 < u \leqslant 60 \\ 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{70-u}{10}\right)^2 & 60 < u \leqslant 70 \\ 1 & u > 70 \end{cases}$$

见图2.于是

$$
\text{〔偏向老〕}(u)=P_{1/2}(\text{〔老〕})(u)
$$

$$
=\begin{cases}0 & \text{当〔老〕}(u)\leqslant 1/2\\ 1 & \text{当〔老〕}(u)>1/2\end{cases}
$$

$$
=\begin{cases}0 & \text{当}u\leqslant 60\\ 1 & \text{当}u>60\end{cases}
$$

即超过60岁者偏老.

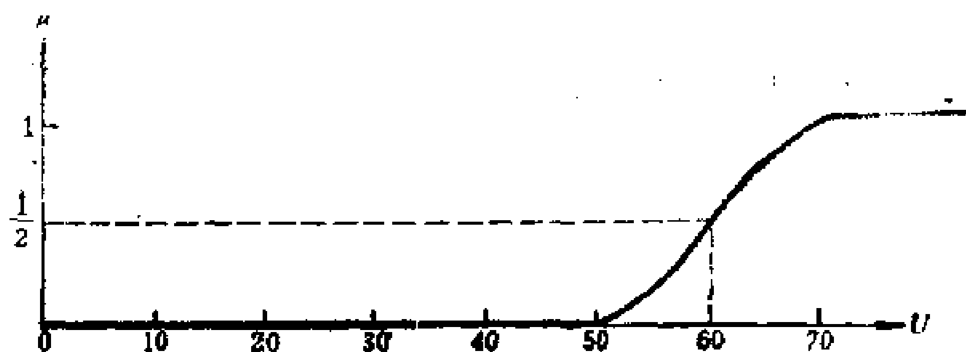


图2

在自然语言系统中，大、小、多、少、轻、重、长、短等词同数值有密切联系，因而称为语言值.语言值一般都是模糊的，可以用 Fuzzy 数表示.在应用时，常常根据论域的具体情况将 Fuzzy 数离散化.

例4 在论域$U=\{1,2,\cdots,10\}$上可以定义

$$
\text{〔大〕}=\frac{0.2}{4}+\frac{0.4}{5}+\frac{0.6}{6}+\frac{0.8}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10},
$$

$$
\text{〔小〕}=\frac{1}{1}+\frac{0.8}{2}+\frac{0.6}{3}+\frac{0.4}{4}+\frac{0.2}{5}.
$$

于是

$$
\text{〔很大〕}=H_2(\text{〔大〕})
$$

$$=\frac{0.04}{4}+\frac{0.16}{5}+\frac{0.36}{6}+\frac{0.64}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10},$$

$$[\text{偏小}]=P_{1/2}([\text{小}])=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}.$$

语言值作为论域上的 Fuzzy 集，除了可以按照§2.2中的规定进行并、交、补运算之外，还可以根据§5.2中的二元扩展原则进行二元运算。

例5 设论域U是所有整数的集，又

$$\underset{\sim}{1}=\frac{0.1}{-1}+\frac{0.5}{0}+\frac{1}{1}+\frac{0.5}{2}+\frac{0.1}{3}$$

(i) 根据整数加法的扩展计算$\underset{\sim}{1}+\underset{\sim}{1}=?$

(ii) 根据整数格运算$m\times n=\mathrm{Min}\{m,n\}$的扩展计算 $\underset{\sim}{1}\wedge(\underset{\sim}{1}+\underset{\sim}{1})=?$

解 (i)记$\underset{\sim}{1}+\underset{\sim}{1}=\underset{\sim}{2}$。则

$$\underset{\sim}{2}=\underset{\sim}{1}+\underset{\sim}{1}=\int_U\bigvee_{x+y=z}[\underset{\sim}{1}(x)\wedge\underset{\sim}{1}(y)]/z$$

$$=\frac{0.1}{-2}+\frac{0.1}{-1}+\frac{0.5}{0}+\frac{0.5}{1}+\frac{1}{2}+\frac{0.5}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{0.1}{5}+\frac{0.1}{6}$$

(ii) $\underset{\sim}{1}\wedge(\underset{\sim}{1}+\underset{\sim}{2})=\underset{\sim}{1}\wedge\underset{\sim}{2}$

$$=\int_U\bigvee_{x\wedge y=z}[\underset{\sim}{1}(x)\wedge\underset{\sim}{2}(y)]/z$$

$$= \frac{0.1}{-2} + \frac{0.1}{-1} + \frac{0.5}{0} + \frac{1}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{0.1}{3}.$$

§ 6.2 Fuzzy判断句

Fuzzy 判断句是在 Fuzzy 推理中出现的最基本的句型．我们先从二值逻辑的命题谈起。

一、二值逻辑中的命题

在数理逻辑中，把意义明确且能判断真假的陈述句叫做命题，平常用大写英文字母 P，Q，R，…等表示．例如

P：“氙是惰性气体”

Q：“光波的频率高于声波的频率”

R：“公元1987年是闰年”

以上这些陈述句的内容虽然各不相同，但意义都明确且能判断真假．命题 P 符合事实，我们称之为真命题，并说它的真值为1．Q 也是真命题，真值为1．R 不符合事实，我们称之为假命题，并说它的真值为0。

由于命题的真值 $\in\{0,1\}$，因此数理逻辑别名二值逻辑。

有一点需要提醒，一个意义明确的陈述句所谓能判断真假，意思是指它有真假可言，也就是它非真即假，非假即真，绝不模棱两可，但并不要求存在着判断它的真假的现实手段。

设 P 是一个命题，命题“P 是不对的”称为 P 的否定式，记以 $\urcorner P$，读作非 P．规定 $\urcorner P$ 的真值等于1的充分必要条件是 P 的真值等于0。

设 P，Q 是两个命题．命题“P 或者 Q”称为 P，Q 的析取式，记以 $P \vee Q$，读作 P 或 Q．规定 $P \vee Q$ 的真值等于 1 的

充分必要条件是 P，Q 两者之中至少有一个的真值等于1.

在自然语言中，‘或者’一词包含不可得兼的意思在内。作为例子，请看“明晚张三在体育馆观看国际网球赛或者在音乐厅欣赏古典交响曲”这句话.这句话指出张三在观看网球赛与欣赏交响曲两件事情之中顶多择一而行，不能同时完成。因此在自然语言中，‘或者’是指‘排斥或’，也叫做‘异或’.但是在二值逻辑中，$P\vee Q$ 允许兼容，‘或者’是指‘兼容或’.例如

P：“明天最高气温是23°C”.

Q：“明天最低气温是10°C”.

$P\vee Q$：“明天最高气温是23°C或者最低气温是10°C”.

设P，Q是两个命题.命题“P并且Q”称为P，Q的合取式.记以$P\wedge Q$，读作P且Q.规定 $P\wedge Q$ 的真值等于1的充分必要条件是 P，Q 两者的真值都等于1.

仍设P，Q是两个命题.句子“如果P则Q”称为P，Q的蕴涵式，记以 $P\to Q$ 读作 P 蕴涵 Q.规定 $P\to Q$ 的真值等于0的充分必要条件是 P 的真值等于1而且 Q 的真值等于0. P 叫做蕴涵式 $P\to Q$ 的前提，Q 叫做此蕴涵式的结论.

以上所说的否定式、析取式、合取式、蕴涵式都可以看成是由原始命题 P，Q 通过逻辑运算否定、析取、合取、蕴涵而构成的复合命题.这四个复合命题的真值对于原始命题的真值的依赖关系可以利用表1及表2来说明.这种以表格式体现的依赖关系叫做该复合命题的真值表.

表 1

命 题	P	$\neg P$
真 值	1	0
	0	1

表 2

命 题	P	Q	$P\vee Q$	$P\wedge Q$	$P\to Q$
真 值	1	1	1	1	1
	1	0	1	0	0
	0	1	1	0	1
	0	0	0	0	1

利用真值表比较复合命题的异同是有意义的。例如复合命题 $\neg P\vee Q$ 与 $\neg P\vee(P\wedge Q)$ 对原始命题 P，Q 的依赖关系见表3。

表 3

命 题	P	Q	$\neg P$	$\neg P\vee Q$	$P\wedge Q$	$\neg P\vee(P\wedge Q)$
真 值	1	1	0	1	1	1
	1	0	0	0	0	0
	0	1	1	1	0	1
	0	0	1	1	0	1

由表2及表3看出 $P\to Q$，$\neg P\vee Q$，$\neg P\vee(P\wedge Q)$ 具有相

同的真值表，因此可以把它们看作相等，即

$$P\to Q=\neg P\vee Q=\neg P\vee(P\wedge Q).$$

这是经常使用的等式。

一般地，真值表相同的复合命题永远可以看成相等。

另外，还要谈谈等价式。设 P，Q 是两个原始命题。复合命题"P 当且仅当 Q"称为 P，Q 的等价式。记以 $P\longleftrightarrow Q$，读作 P 等价于 Q。规定 $P\longleftrightarrow Q$ 的真值等于1的充分必要条件是 P，Q 的真值相同。例如

P：“$a^2+b^2=a^2$”

Q：“$b=0$”

$P\longleftrightarrow Q$：“$a^2+b^2=a^2$ 当且仅当 $b=0$”

等价式的真值表见表4。

表 4

命　题	P	Q	$P\longleftrightarrow Q$
真　值	1	1	1
	1	0	0
	0	1	0
	0	0	1

利用真值表不难证明

$$P\longleftrightarrow Q=(P\to Q)\wedge(Q\to P)$$
$$=(\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee P).$$

二、Fuzzy 判断句

句型为“x是a”的陈述句称为判断句。这里a是表示概念的一个词，x 叫做语言变元，它可以代表论域 X 中的任何一个特

定对象。我们把“x是a”这个判断句记作(a)。

在判断句(a)中，若词a所表示的概念是确切的，则称(a)为普通判断句。

例如a表示大学生，取x为张三，则得到“张三是大学生”这样的陈述句。这句话可以是真的（当张三是某大学学生），也可以是假的（当张三并非大学生而是个工人）。这样一个能判断真假的陈述句就是二值逻辑中的命题。一般地，一个普通判断句(a)对应一个普通集合

$$A=\{x|x\in X,\ (a)\text{ 对 } x \text{ 真}\}.$$

这里(a)对x真指的是对此特定的x，命题“x是a”为真。我们称A为判断句(a)的集合表示或称为真域，如图1。

若$A=X$，则称判断句(a)永真，即对$\forall x\in X$，“x是a”为真。若$A=\phi$，则称判断句(a)永假，即对$\forall x\in X$，“x是a”为假。

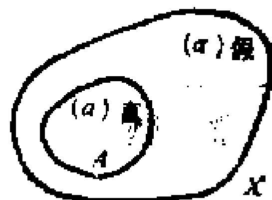


图1

在判断句(a)中，若词a所表示的概念是模糊的，则称(a)为Fuzzy判断句。

例如a表示老人，取x为张三，则“张三是老人”就成了模糊命题；由于老人概念的模糊性，无法判断“张三是老人”这句话是绝对真还是绝对假，根据张三的具体情况，可令其真值为[0,1]中的数，记为$T((a)(\text{张三}))$，这个数叫做(a)对张三的真值。依惯例，当“张三是老人”这句话绝对真时令$T((a)(\text{张三}))=1$，当“张三是老人”绝对假时令$T((a)(\text{张三}))=0$。一般地说，(a)对x的真值记作$T((a)(x))$。令

$A\in\mathscr{F}(X)$，其隶属函数

$$A(x)=T((a)(x)).$$

称A为(a)的集合表示或真域.我们以概念a对应的Fuzzy集作为(a)的集合表示.例如,a表示老人,与a对应的Fuzzy集是O,则定义"张三是老人"的真值等于张三对O的隶属度，即

$$T((a)(\text{张三}))=O(\text{张三}),$$

于是(a)的真域$A=O$.

设x_0是论域X中的一个特定对象.当$T((a)(x_0))>1/2$时，称判断句对x_0偏真，也称x_0是判断句的偏真点；当$T((a)(x_0))<1/2$时，称判断句对x_0偏假，也称x_0是判断句的偏假点；当$T((a)(x_0))=1/2$时，称判断句对x_0两可，也称x_0是判断句的临界点.若对$\forall x\in X$，均有$T((a)(x))\geqslant\lambda$，$\lambda\in(0,1]$.则称$(a)$为$\lambda$—真.此时$A_\lambda=X$.特别当$\lambda=1$时，$A_1=X$，即$(a)$是永真的判断句.

通过逻辑运算可以从给定的判断句得到新的判断句.例如给定两判断句"x是a"，"x是b"，分别记作(a)，(b)，则

$(a\vee b)$："x是a或x是b"；

$(a\wedge b)$："x是a且x是b"；

$(\neg a)$："x不是a".

若(a)，(b)为普通判断句，它们的真域分别为A，B，则

$$\begin{aligned}(a\vee b)\text{的真域}&=\{x\mid \text{“}x\text{是}a\text{”真或“}x\text{是}b\text{”真}\}\\&=\{x\mid x\in A\text{或}x\in B\}\end{aligned}$$

$$= A \cup B.$$

类似地推知，$(a\wedge b)$的真域为$A\cap B$，$(\neg a)$的真域为A^c。

若(a)，(b)为 Fuzzy 判断句，真域分别为$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$，则定义$(a\vee b)$对x的真值为$T((a)(x))$与$T((b)(x))$中的较大者，即

$$\begin{aligned} T((a\vee b)(x)) &= T((a)(x))\vee T((b)(x)) \\ &= \underset{\sim}{A}(x)\vee \underset{\sim}{B}(x) = (\underset{\sim}{A}\cup \underset{\sim}{B})(x) \end{aligned}$$

因此，$(a\vee b)$ 的真域为$\underset{\sim}{A}\cup \underset{\sim}{B}$.类似地，$(a\wedge b)$ 的真域为$\underset{\sim}{A}\cap \underset{\sim}{B}$，$(\neg a)$的真域为$\underset{\sim}{A}^c$。

因此判断句的逻辑运算$(\vee,\wedge,\neg)$与它们真域的集合运算$(\cup,\cap,{}^c)$是一致的。

§6.3 Fuzzy推理句

句型为"若x是a，则x是b"的语句叫做推理句.记作$(a\to b)$。

在这里，"x是a"，"x是b"均为前节讨论过的判断句，分别叫做推理句的前提和结论。

例如"若x是等边三角形，则x是等腰三角形"便是一个推理句，可记作$(a\to b)$，其中(a)表示"x是等边三角形"，(b)表示"x是等腰三角形".又如"若x是小学生，则x是钢琴手"也是推理句。

推理句同判断句一样，可以正确，也可以错误．例如上面前一例是正确的，也就是说，$(a\to b)$对所有的x都是真的，$(T(a\to b)(x))=1$；而后一例则不然，小学生不一定都是钢

琴手。

在推理句$(a\to b)$中，若a，b所表示的概念都是确切的，则称之为普通推理句。取变元x的一个特定对象x_0，于是"若x_0是a，则x_0是b"便成为二值逻辑中的命题蕴涵式，其真值$T((a\to b)(x_0))\in\{0,1\}$。令

$$R=\{x\mid x\in X,(a\to b)\text{对}x\text{真}\}$$

称R为$(a\to b)$的集合表示或真域。根据前面对命题的蕴涵式所作的规定，$(a\to b)$对x真是指$(\urcorner a)$对x假或者$(a\wedge b)$对x真。因此

$$\begin{aligned}R&=\{x\mid(\urcorner a)\text{对}x\text{真或}(a\wedge b)\text{对}x\text{真}\}\\&=\{x\mid(\urcorner a)\text{对}x\text{真}\}\cup\{x\mid(a\wedge b)\text{对}x\text{真}\}\\&=A^c\cup(A\cap B)\\&=(A^c\cup A)\cap(A^c\cup B)\\&=A^c\cup B.\end{aligned}$$

其中A，B分别是前提(a)及结论(b)的真域。

定义1 普通推理句$(a\to b)$叫做永真，也叫做定理，意思是说，它的真域与论域重合。

非常明显

$$\begin{aligned}A^c\cup B=X&\Longleftrightarrow(A^c\cup B)^c=\phi\\&\Longleftrightarrow A\cap B^c=\phi\\&\Longleftrightarrow A\subseteq B\quad,\end{aligned}$$

因此普通推理句$(a\to b)$成为定理的充分必要条件是：前提(a)的真域A包含在结论(b)的真域B中。

定义2 设X'是论域X的子集。普通推理句$(a\to b)$叫做在X'范围内永真，也叫做在X'范围内的定理，意思是说$(a\to b)$对X'的每一元x'为真。

易知，普通推理句($a\to b$)对X'的每一元x'为真

$$\Longleftrightarrow \forall x'\in X' 有 x'\in A^c\cup B$$

$$\Longleftrightarrow X'\subseteq A^c\cup B$$

$$\Longleftrightarrow (A^c\cup B)^c\subseteq X'^c$$

$$\Longleftrightarrow A\cap B^c\subseteq X'^c$$

$$\Longleftrightarrow (A\cap B^c)\cap X'=\phi$$

$$\Longleftrightarrow (A\cap X')\cap B^c=\phi$$

$$\Longleftrightarrow A\cap X'\subseteq B$$

换言之，普通推理句($a\to b$)在X'范围内成为定理的充分必要条件是：(a)的真域A与X'的交集$A\cap X'$包含在(b)的真域B之中，如图1所示。由此可见，即使($a\to b$)是在X'范围内的定理，也不一定成为整个论域X内的定理，除非$A\subseteq B$。此外，($a\to b$)在其真域$A^c\cup B$内是定理，而且$A^c\cup B$是最大范围。

普通推理句($a\to b$)在二值逻辑演绎推理中扮演重要角色。如果($a\to b$)永真，那么它可以作为演绎推理中不能缺少的理论依据。细述如下。

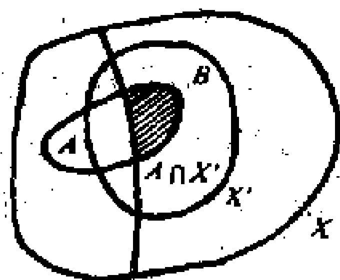


图 1

1. 假言推论规则

(i) ($a\to b$)是定理，且(a)对x真$\Rightarrow$(b)对x真。

其集合解释是十分明显的，即 $A\subseteq B$且$x\in A\Longrightarrow x\in B$。

(ii) ($a\to b$)是在X'范围内的定理且(a)对$x\in X'$真$\Longrightarrow$(b)对x真。

其集合解释为

$$A\cap X'\subseteq B 且 x\in X', x\in A\Longrightarrow x\in B.$$

(iii) ($a\to b$)对x真且(a)对x真$\Longrightarrow$(b)对x真。

其集合解释为

$$x \in A^c \cup B \text{且} x \in A$$

$$\Rightarrow x \in (A^c \cup B) \cap A = (A^c \cap A) \cup (B \cap A)$$

$$= B \cap A \subseteq B.$$

2. 拒取式规则

(i) $(a \to b)$是定理且(b)对x假$\Longrightarrow(a)$对 x 假. 其集合解释为

$$A \subseteq B \text{且} x \notin B \Longrightarrow x \notin A.$$

(ii) $(a \to b)$是在X'范围内的定理且(b)对$x \in X'$假 $\Longrightarrow$ (a)对x假

其集合解释为

$$A \cap X' \subseteq E \text{ 且} x \in X', x \notin E.$$

$$\Longrightarrow x \in X' \cap B^c \subseteq X' \cap (A \cap X')^c$$

$$= X' \cap (A^c \cup (X')^c)$$

$$= (X' \cap A^c) \cup (X' \cap (X')^c)$$

$$= X' \cap A^c$$

$$\Longrightarrow x \in A^c$$

$$\Longrightarrow x \notin A.$$

(iii) $(a \to b)$对 x 真且(b)对x假$\Longrightarrow(a)$对x假.

其集合解释为

$$x \in A^c \cup E \text{且} x \notin B$$

$$\Longrightarrow x \in (A^c \cup B) \cap B^c = (A^c \cap B^c) \cup (B \cap B^c) = A^c \cap B^c$$

$$\Longrightarrow x \in A^c$$

$$\Longrightarrow x \notin A.$$

3. 合成规则

(i) $(a \to b)$是定理且$(b \to c)$是定理

$$\Longrightarrow (a\to c)\text{是定理}.$$

其集合解释为

$$A\subseteq B\text{且}B\subseteq C\Longrightarrow A\subseteq C.$$

(ii) $(a\to c)$是在X'范围内的定理且$(b\to c)$是在X'范围内的定理

$\Longrightarrow$ $(a\to c)$ 是在X'范围内的定理. 其集合解释为

$$A\cap X'\subseteq B\text{且}B\cap X'\subseteq C$$

$$\Longrightarrow A\cap X'=(A\cap X')\cap X'\subseteq B\cap X'\subseteq C.$$

(iii) $(a\to b)$对x真且$(b\to c)$对x真

$\Longrightarrow (a\to c)$对x真.

其集合解释为

$$x\in A^c\cup B\text{且}x\in B^c\cup C$$

$$\Longrightarrow x\in(A^c\cup B)\cap(B^c\cup C)$$

$$=(A^c\cap B^c)\cup(A^c\cap C)\cup(B\cap B^c)\cup(B\cap C)$$

$$\subseteq A^c\cup C.$$

以上针对普通推理句立论，现在转向Fuzzy推理句. 在推理句$(a\to b)$中，若 a 则 b 所表示的概念是模糊的，则称之为Fuzzy推理句.

例如"若x是商品推销员，则x是社交能手"便是一个Fuzzy 推理句；社交能手这个概念具有模糊性.

对于Fuzzy推理句也象对Fuzzy判断句一样，不存在绝对的真与绝对的假，只能说它以多大程度为真，也就是说，$(a\to b)$的真值$T((a\to b)(x))\in[0,1]$. 令$\underset{\sim}{R}\in\mathscr{F}(X)$,

$$\underset{\sim}{R}(x)=T((a\to b)(x)).$$

称R为$(a\to b)$的集合表示或真域.

在普通情况下，$(a\to b)$的真域 $=A^c\cup B=A^c\cup(A\cap B)$. 但是在模糊情况下，$A^c\cup B$与$A^c\cup(A\cap B)$不一定相等. 例如若对某个固定的$x$，设$A(x)=0.6$，$B(x)=0.8$，则

$$(A^c\cup B)(x)=(1-A(x))\vee B(x)=0.8,$$

$$(A^c\cup(A\cap B))(x)=(1-A(x))\vee(A(x)\wedge B(x))$$

$$=0.6\quad.$$

那么如何定义$(a\to b)$的真域或$(a\to b)$对x的真值呢？与二值逻辑对照，有两种不同方案

$$T_1((a\to b)(x))=(1-A(x))\vee B(x)$$

$$T_2((a\to b)(x))=(1-A(x))\vee(A(x)\wedge B(x))$$

分别对应真域

$$R_1=A^c\cup B\quad,$$

$$R_2=A^c\cup(A\cap B)\quad;$$

其中A，B分别代表(a)，(b)的真域，见图2. 图3及图4给出$(a\to a)$的两种不同真域.

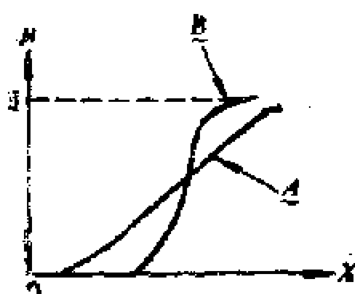


图2

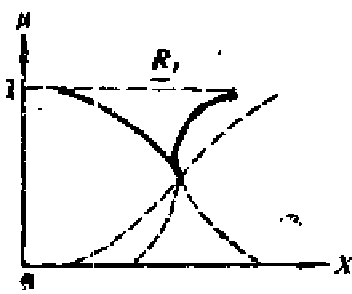


图3

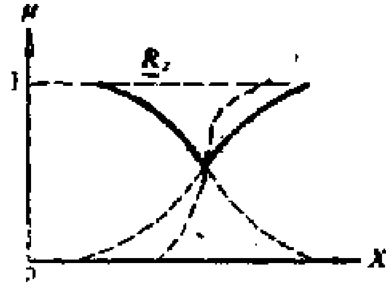


图4

选定Fuzzy推理句的真域方案后，即可引进几个有用的概念。

定义1 在论域X上给定Fuzzy推理句$(a\to b)$，又$x_0\in X$。所谓$(a\to b)$对x_0偏真，意思是指$T((a\to b)(x_0))>1/2$；所谓$(a\to b)$对x_0偏假，意思是指$T((a\to b)(x_0))<1/2$.

定义2 在论域X上的Fuzzy推理句$(a\to b)$叫做一个模糊定理，简称F－定理，意思是说对$\forall x\in X$永远有$T((a\to b)(x))>1/2$。

定义3 设X'是论域X的子集．Fuzzy推理句$(a\to b)$叫做在X'范围内的一个模糊定理，简称在X'内的F－定理，意思是说对$\forall x\in X'$永远有$T((a\to b)(x))>1/2$。

F－定理是Fuzzy演绎推理的理论依据。

定理1 在Fuzzy推理句的第一种真域中，假言推理规则具有下列性质．

(i)设$(a\to b)$是F－定理且(a)对x偏真．则(b)对x偏真，并且

$$T((b)(x))=T_1((a\to b)(x)). \qquad (1)$$

(ii) 设$(a\to b)$是在X'范围内的F－定理且(a)对$x\in X'$偏真．则(b)对x偏真；并且等式(1)成立。

(iii) 设$(a\to b)$对x偏真且(a)对x偏真，则(b)对x偏真，并且等式(1)成立。

证 (i)已知

$$T_1((a\to b)(x))=(1-A(x))\vee B(x)>1/2;$$

又已知

$$T((a)(x))=A(x)>1/2.$$

于是

$$1-A(x)<1/2, \quad B(x)>1/2.$$

因此

$$T((b)(x))=B(x)=((1-A(x))\vee B(x)$$

$$=T_1((a\to b)(x))>1/2.$$

可见(b)对x偏真并且等式(1)成立。

同法证明(ii)及(iii)。 □

定理2 在Fuzzy推理句的第一种真域中，拒取式规则具有下列性质.

(i) 设$(a\to b)$是F－定理且(b)对x偏假.则(a)对x偏假并且

$$T((a)(x))=1-T_1((a\to b)(x)) \tag{2}$$

(ii) 设$(a\to b)$是在X'范围内的F－定理且(a)对$x\in X'$偏假．则(a)对x偏假，并且等式(2)成立。

(iii) 设$(a\to b)$对x偏真且(b)对x偏假。则(b)对x偏假，并且等式(2)成立。

证 (i) 已知

$$T_1((a\to b)(x))=(1-A(x))\vee B(x)>1/2;$$

又已知

$$T((b)(x))=B(x)<1/2.$$

于是

$$1-A(x)>1/2.$$

从而

$$T((a)(x))=A(x)=1-(1-A(x))$$

$$=1-((1-A(x))\vee B(x))$$

$$=1-T_1((a\to b)(x))<1/2.$$

可见(a)对x偏假，并且等式(2)成立．

同法证明(ii)及(iii)． □

定理3 在Fuzzy推理句的第一种真域中，合成规则具有下列性质．

(i) 设$(a\to b)$是F－定理且$(b\to c)$是F－定理．则$(a\to c)$是F－定理，并且对$\forall x\in X$有

$$T_1((a\to c)(x))\geqslant T_1((a\to b)(x))\wedge T_1((b\to c)(x)) \tag{3}$$

(ii) 设$(a\to b)$是在X'范围内的F－定理且$(b\to c)$是在X'范围内的F－定理．则$(a\to c)$是在X'范围内的F－定理，并且对$\forall x\in X'$成立着不等式(3)．

(iii) 设$(a\to b)$对x偏真且$(b\to c)$对x偏真．则$(a\to c)$对x偏真，并且不等式(3)成立．

证 (i) 由已知条件，我们有

$$T_1((a\to b)(x))=(1-A(x))\vee B(x)>\tfrac{1}{2},$$

$$T_1((b\to c)(x))=(1-B(x))\vee C(x)>1/2.$$

分别处理两种情况．首先设$B(x)>1/2$．此时$1-B(x)<1/2$，故

$$T_1((b\to c)(x))=C(x)>1/2.$$

从而

$$T_1((a\to c)(x))=(1-A(x))\vee C(x)\geqslant C(x)$$

$$=T_1((a\to c)(x))>1/2.$$

其次设$B(x)\leqslant 1/2$．此时

$$T_1((a\to b)(x))=1-A(x)>1/2$$

从而

$$T_1((a\to c)(x))=(1-A(x))\vee C(x)\geqslant 1-A(x)$$
$$=T_1((a\to b)(x))>1/2.$$

概括起来说，在每一种情况下均有

$$T_1((a\to c)(x))\geqslant T_1((a\to b)(x))$$
$$\wedge T_1((b\to c)(x))>1/2$$

可见$(a\to c)$是F－定理，并且不等式(3)成立.

同法证明(ii)及(iii). □

如果Fuzzy推理句的真域采用第二种方案，则上述三定理需要略加修改.

定理4 在Fuzzy推理句的第二种真域中，假言推理规则具有下列性质.

(i)设$(a\to b)$是F－定理且(a)对x偏真，则(b)对x偏真，并且

$$T((b)(x))\geqslant T_2((a\to b)(x)). \tag{4}$$

(ii) 设$(a\to b)$是在X'范围内的F-定理且(a)对$x\in X'$偏真. 则(b)对x偏真，并且不等式(4)成立.

(iii) 设$(a\to b)$对x偏真且(a)对x偏真. 则(b)对x偏真，并且不等式(4)成立.

证 与定理1类似，留给读者处理. □

定理5 在Fuzzy推理句的第二种真域中，拒取式规则具有下列性质.

(i) 设$(a\to b)$是F－定理且(b)对x偏假. 则(a)对x偏假，并且

$$T(a(x))=1-T_2((a\to b)(x)) \tag{5}$$

(ii) 设$(a\to b)$是在X'范围内的F－定理且(b)对$x\in X'$

假．则(a)对x偏假，并且等式(5)成立．

(iii) 设$(a\to b)$对x偏真且(b)对x偏假．则(a)对x偏假，并且等式(5)成立．

证 与定理2类似，留给读者处理． □

定理6 在Fuzzy推理句的第二种真域中，合成规则具有下列性质．

(i) 设$(a\to b)$是F－定理且$(b\to c)$是F－定理．则$(a\to c)$是F－定理并且对$\forall x\in X$，有

$$T_2((a\to c)(x))\geqslant T_2((a\to b)(x))\wedge T_2((b\to c)(x)) \qquad (6)$$

(ii) 设$(a\to b)$是在X'范围内的F－定理且$(b\to c)$是在X'范围内的F－定理，则$(a\to c)$是在X'范围内的F-定理，并且对$\forall x\in X'$成立着不等式(6)．

(iii) 设$(a\to b)$对x偏真且$(a\to c)$对x偏真．则$(a\to c)$对x偏真，并且不等式(6)成立．

证 与定理(3)类似． □

§6·4 在不同论域上的Fuzzy推理句

句型为"若x是a，则y是b"的Fuzzy推理句，涉及两个不同的变元x，y，这两个变元可以分别属于两个不同的论域X，Y；因而它的真域是$X\times Y$的子集或$X\times Y$上的Fuzzy集合，也就是从X到Y的普通关系或Fuzzy关系．我们把这样的Fuzzy推理句记着$(a(x)\to b(y))$．

首先讨论普通情形．在推理句$(a(x)\to b(y))$中，若a，b所表示的概念都是确切的，则这种普通推理句的集合表示，亦即真域R，便是从X到Y的一个普通关系．

$$R=\{(x,y)|(a(x)\to b(y))\text{对}(x,y)\text{真}\}$$
$$=\{(x,y)|(\rceil a)\text{对}x\text{真}\}$$
$$=\bigcup\{(x,y)|(a)\text{对}x\text{真且}(b)\text{对}y\text{真}\}$$
$$=\{(x,y)|x\in A^c\}\bigcup\{(x,y)|x\in A\text{且}y\in B\}$$
$$(A^c\times Y)\bigcup(A\times B).$$

其中A，B分别为(a)，(b)的真域．图1中带斜线的部分表示普通推理句$(a(x)\to b(y))$的真域．从图中可以看出

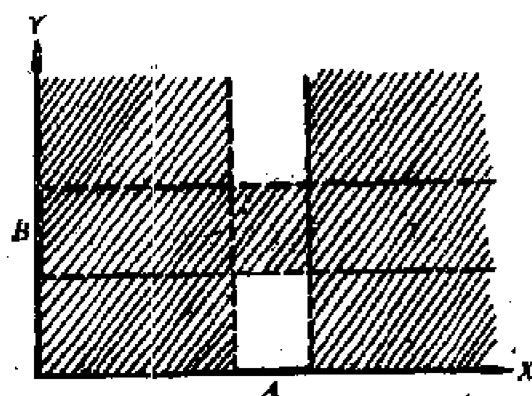


图 1

$$R=(A^c\times Y)\bigcup(A\times B)=(A^c\times Y)\bigcup(X\times B)$$

其特征函数

$$R(x,y)=(1-A(x))\vee(A(x)\wedge B(y))$$
$$=(1-A(1))\vee B(y).$$

例1 设论域X为气温的变化范围，Y为空调系统每天供应冷气的时数范围．考查推理句"若气温高于32°C，则供冷时间超过12小时"的真域R．

令判断句"气温高于32°C"以及"供冷时间超过12小时"的真域分别为A，B．

$$A=\{x|x>32°C\}\subseteq X,$$

$$B=\{y|y\in(12,\ 24]\}\subseteq Y.$$

于是

$$\begin{aligned}R&=(A^c\times Y)\cup(A\times B)\\&=\{(x,y)|x\in A^c\}\cup\{(x,y)|x\in A\text{且}y\in B\}\\&=\{(x,\ y)|x\leqslant 32^\circ\text{C}\}\\&\quad\cup\{(x,\ y)|x>32^\circ\text{C且}y\in(12,24]\}.\end{aligned}$$

如果气温 $x_1=33^\circ\text{C}, y_1=13$小时，由于$(x_1,y_1)\in A\times B$，于是$(x_1,y_1)\in R$，即该推理句对$(x_1,y_1)$为真，符合正常供冷要求。如果 $x_2=29^\circ\text{C}, y_2=1$小时，由于$(x_2,y_2)\in A^c\times Y$，于是$(x_2,y_2)\in R$；虽然仅供冷1小时，该推理句对$(x_2,y_2)$仍然真，仍然符合正常供冷要求，这是因为气温未高于 32°C.但是如果$x_3=34^\circ\text{C}$，$y_3=9$小时，则$(x_3,y_3)\notin R$，即该推理句对(x_3,y_3)为假，此时不符合正常供冷要求.

在供冷正常情况下，推理规则应满足：(1) 若$x\in A$.(如33°C，35°C，37°C等)，则$y\in B$，即y超过12小时. 这是假言推理规则所要求的.(2) 若$y\notin B$，即y不超过12小时，则$x\notin A$，即气温不高于32°C. 这是拒取式规则所要求的.一般地，以普通推理句$(a(x)\to b(y))$为依据的二值逻辑规则由下列两定理给出.

定理1 普通推理句$(a(x)\to b(y))$的假言推理规则具有下列性质.

$$(a(x)\to b(y))\text{对}(x,y)\text{真且}(a)\text{对}x\text{真}$$
$$\Longrightarrow(b)\text{对}y\text{真}.$$

证 设$A\in\mathscr{P}(X)$，$B\in\mathscr{P}(Y)$分别是(a)，(b)的真域，又$(a(x)\to b(y))$的真域$R=(A^c\times Y)\cup(A\times B)\in\mathscr{P}(X\times Y)$.

已知$(x,y)\in R$且$x\in A$. 由此推出

$$x \notin A^c$$
$$\Rightarrow (x,y) \notin A^c \times Y$$
$$\Rightarrow (x,y) \in A \times B$$
$$\Rightarrow y \in B$$

可见(b)对y真. □

定理 2 普通推理句$(a(x) \to b(y))$的拒取式规则具有下列性质.

$$(a(x) \to b(y))\text{对}(x,y)\text{真且}(b)\text{对}y\text{假}$$
$$\Rightarrow (a)\text{对}x\text{假}.$$

证 设A, B, R的意义同定理1.

已知$(x,y) \in R$且$y \notin B$. 于是

$$(x,y) \notin A \times B$$
$$\Rightarrow (x,y) \in A^c \times Y$$
$$\Rightarrow x \in A^c.$$

可见(a)对x假. □

定理3 普通推理句的合成规则具有下列性质:

$$(a(x) \to b(y))\text{对}(x,y)\text{真且}((b)(y) \to c(z))\text{对}(y,z)\text{真}$$
$$\Rightarrow (a(x) \to c(z))\text{对}(x,y)\text{真}.$$

证 设R, Q, P分别是推理句$(a(x) \to b(y))$, $(b(y) \to c(z))$, $(a(x) \to c(z))$的真域. 已知

$$(x,y) \in R = (A^c \times Y) \cup (A \times B),$$
$$(y,z) \in Q = (B^c \times Z) \cup (B \times C).$$

分别处理两种情况. 第一种, 当$(x,y) \in A^c \times Y$, 此时

$$x \in A^c \Rightarrow (x,z) \in A^c \times Z \subseteq (A^c \times Z) \cup (A \times C) = P.$$

第二种, 当$(x,y) \in A \times B$, 此时

$$x \in A\text{且}y \in B$$

$\Longrightarrow x\in A$且$y\notin B^c$

$\Longrightarrow x\in A$且$(y,z)\notin B^c\times Z$

$\Longrightarrow x\in A$且$(y,z)\in B\times C$

$\Longrightarrow x\in A$，$y\in B$，$z\in C$

$\Longrightarrow (x,z)\in A\times C\subseteq(A^c\times Z)\cup(A\times C)=P$.

由此可见，在任何情况下，$(a(x)\to c(z))$对(x,z)都真． □

推论 设R，Q，P分别是普通推理句$(a(x)\to b(y))$，$(b(y)\to c(z))$，$(a(x)\to c(z))$的真域．则R，Q的合成$R\circ Q\subseteq P$．另外，如果(b)的真域B是Y的真子集，则等号成立．

证 已知(a)，(b)，(c)的真域分别为A，B，C；又

$R=(A^c\times Y)\cup(A\times B)$,

$Q=(B^c\times Z)\cup(B\times C)$,

$P=(A^c\times Z)\cup(A\times C)$.

任取$(x,z)\in R\circ Q$．此时存在$y\in Y$使$(x,y)\in R$且$(y,z)\in Q$．换言之，$(a(x)\to b(y))$对(x,y)真且$(b(y)\to c(z))$对(y,z)真．根据定理3推知$(a(x)\to c(z))$对(x,z)真，$(x,z)\in P$，由此可见，$R\circ Q\subseteq P$．

进一步设B是Y的真子集．任取$(x,z)\in P$．证$(x,z)\in R\circ Q$．

首先处理$x\in A$的情况，此时$z\in C$．因为$B\neq\phi$，所以存在$y\in B$．由此$(x,y)\in A\times B\subseteq R$且$(y,z)\in B\times C\subseteq Q$．于是$(x,z)\in R\circ Q$．

还要处理$x\in A^c$的情况，因为$B\neq Y$，所以存在$y\in B^c$由此$(x,y)\in A^c\times Y\subseteq R$且$(y,z)\in B^c\times Z\subseteq Q$．于是$(x,z)\in R\circ Q$．

总之只要B是Y的真子集，我们便可推出$P\subseteq R\circ Q$．从而等

式$R\circ Q=P$的确成立. □

在此推论中为了使$R\circ Q=P$，我们限制(b)的真域B是Y的真子集. 如果离开这个限制，那么等号未必成立，其说明见下例.

例2 给定论域$X=Y=Z=[0,1]$，又普通推理句$(a(x)\to b(y))$，$(b(y)\to c(z))$，$(a(x)\to c(z))$的真域分别为R，Q，P，

$$R=(A^c\times Y)\cup(A\times B),$$
$$Q=(B^c\times Z)\cup(B\times C),$$
$$P=(A^c\times Z)\cup(A\times C).$$

其中A，B，C分别是(a)，(b)，(c)的真域.

(i) 设$A=[0,1/2]$，$B=\phi$，$C=[0,1/2]$.

此时，我们有

$$R\circ Q=(A^c\times Y)\circ(Y\times Z)=A^c\times Z$$
$$=(1/2,1]\times[0,1],$$
$$P=(1/2,1]\times[0,1]\cup[0,1/2]\times[0,1/2].$$

可见

$$R\circ Q\subset P.$$

(ii) 设$A=[0,1/2]$，$B=Y$，$C=[0,1/2]$.

此时，我们有

$$R\circ Q=(X\times Y)\circ(Y\times C)$$
$$=X\times C=[0,1]\times[0,1/2],$$
$$P=(A^c\times Z)\cup(A\times C)$$
$$=(1/2,1]\times[0,1]\cup[0,1/2]\times[0,1/2].$$

$R\circ Q$及P分别由图2及图3中带斜线的部分来表示. 由此可见

$$R\circ Q\subset P.$$

下面转而讨论Fuzzy推理句. 在推理句$(a(x)\to a(y))$中，

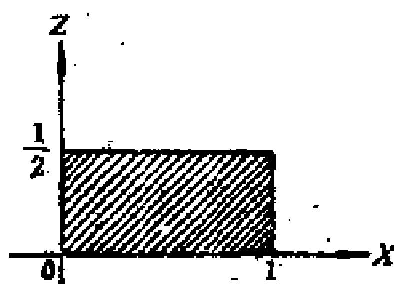


图2

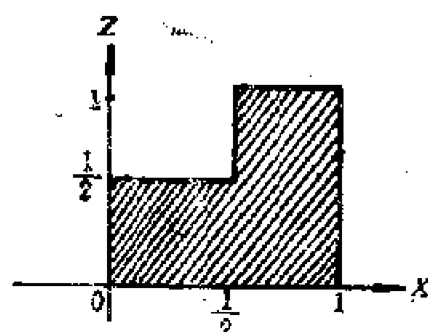


图3

若a或b所表示的概念是模糊的，则称之为Fuzzy推理句．作为普通推理句的真域一种推广，关于$(a(x)\to a(y))$的真域$R\in\mathscr{F}(X\times Y)$，我们采用

$$R=(\underset{\sim}{A}^c\times Y)\cup(\underset{\sim}{A}\times \underset{\sim}{B})$$

其中A，B分别为(a)，(b)，的真域(x,y)对$\underset{\sim}{R}$的隶属度即$(x)\to b(y))$对(x,y)的真域，满足等式

$$T((a(x)\to b(y))(x,y))=\underset{\sim}{R}(x,y)$$
$$=(1-\underset{\sim}{A}(x))\vee(\underset{\sim}{A}(x)\wedge B(y)).$$

以$(a(x)\to b(y))$为依据的Fuzzy演绎推理规则由下列三定理给出．

定理4 假言推理规则：设$(a(x)\to b(y))$对(x,y)偏真．且(a)对x偏真．则(b)对y偏真，并且

$$T((b)(y))\geqslant T((a(x)\to b(y))(x,y)).$$

定理5 拒取式规则：设$(a(x)\to b(y))$对(x,y)偏真，且(b)对y偏假．则(a)对x偏假，并且

$$T((a)(x))=1-T((a(x)\to b(y))(x,y)).$$

定理6 合成规则：设$(a(x)\to b(y))$对(x,y)偏真且$(b(y)\to c(z))$对(y,z)偏真．则$(a(x)\to c(z))$对(x,z)偏真，并且

$$T((a(x)\to c(z))(x,z))\geqslant T((a(x)\to b(y))(x,y))$$
$$\wedge T((a(y)\to c(z))(x,y).$$

这三个定理的证明分别类似于§6.3定理4，定理5及定理6.

进行Fuzzy演绎推理条件是$(a(x)\to b(y))$对(x,y)偏真，也就是$(x,y)\in R_{0.5}$，此条件称为相容性条件．

例3 设$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_6\}=\{1.5,1.6\cdots,2.0\}$表示某地区男子身高论域，单位为米；$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_7\}=\{40,50,\cdots,100\}$表示同一地区男子体重论域，单位为公斤．又设对该地区男子来说，高的概念的集合表示为

$$[高]=\frac{0.2}{1.5}+\frac{0.7}{1.7}+\frac{0.9}{1.8}+\frac{1}{1.9}+\frac{1}{2.0},$$

重的概念集合表示为

$$[重]=\frac{0.2}{50}+\frac{0.6}{60}+\frac{0.8}{70}+\frac{0.95}{80}+\frac{1}{90}+\frac{1}{100},$$

考虑Fuzzy推理句“若x很高，则y很重”的真域R．“x很高”的真域记作

$$A=[很高]=H_2[高]=\frac{0.04}{1.6}+\frac{0.49}{1.7}+\frac{0.81}{1.8}+\frac{1}{1.9}+\frac{1}{2.0}$$

表示为Fuzzy向量

$$A=(0,0.04,0.49,0.81,1,1).$$

“y很重”的真域记作

$$\underset{\sim}{B}=[\text{很重}]=H_2[\text{重}]$$

$$=\frac{0.04}{50}+\frac{0.36}{60}+\frac{0.64}{70}+\frac{0.9}{80}+\frac{1}{90}+\frac{1}{100},$$

表示为Fuzzy向量

$$\underset{\sim}{B}=(0,0.04,0.36,0.64,0.9,1,1)$$

采用$\underset{\sim}{R}=(\underset{\sim}{A}^c\times Y)\cap(\underset{\sim}{A}\times\underset{\sim}{B})$, $\underset{\sim}{A}^c$可表示为Fuzzy向量

$$\underset{\sim}{A}^c=(1,0.96,0.51,0.19,0,0).$$

$\underset{\sim}{A}^c\times Y$可表示为$6\times7$ Fuzzy矩阵

$$\underset{\sim}{R}^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0.96\\0.51\\0.19\\0\\0\end{pmatrix}\circ(1,1,1,1,1,1,1)$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1&1\\0.96&0.96&0.96&0.96&0.96&0.96&0.96\\0.51&0.51&0.51&0.51&0.51&0.51&0.51\\0.19&0.19&0.19&0.19&0.19&0.19&0.19\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

$\times\underset{\sim}{B}$可表为6×7Fuzzy矩阵

$$
\underset{\sim}{R}^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\0.04\\0.49\\0.81\\1\\1\end{pmatrix}\circ(0,\ 0.04,\ 0.36,\ 0.64,\ 0.9,\ 1,\ 1)
$$

$$
=\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0.04 & 0.04 & 0.04 & 0.04 & 0.04 & 0.04\\
0 & 0.04 & 0.36 & 0.49 & 0.49 & 0.49 & 0.49\\
0 & 0.04 & 0.36 & 0.64 & 0.81 & 0.81 & 0.81\\
0 & 0.04 & 0.36 & 0.64 & 0.9 & 1 & 1\\
0 & 0.04 & 0.36 & 0.64 & 0.9 & 1 & 1
\end{pmatrix}
$$

于是

$$
\underset{\sim}{R}=(\underset{\sim}{A}^{c}\times Y)\cap(\underset{\sim}{A}\times\underset{\sim}{B})
$$

$$
=\underset{\sim}{R}^{(1)}\cap\underset{\sim}{R}^{(2)}
$$

$$
=\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
0.96 & 0.96 & 0.96 & 0.96 & 0.96 & 0.96 & 0.96\\
0.51 & 0.51 & 0.51 & 0.51 & 0.51 & 0.51 & 0.51\\
0.19 & 0.19 & 0.36 & 0.64 & 0.81 & 0.81 & 0.81\\
0 & 0.04 & 0.36 & 0.64 & 0.9 & 1 & 1\\
0 & 0.04 & 0.36 & 0.64 & 0.9 & 1 & 1
\end{pmatrix}.
$$

以Fuzzy 推理句“若x很高，则y很重”作为 Fuzzy 推理[illegible]相容性条件是$(x_i, y_i)\in\underset{\sim}{R}_{0.5}$,

$$R_{0.5}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix}$$

$$\quad\; y_1 \;\; y_2 \;\; y_3 \;\; y_4 \;\; y_5 \;\; y_6 \;\; y_7$$

因此，该地区男子身高、体重为下列序偶 (x_4,y_1)，(x_4,y_2)，(x_4,y_3)，(x_5,y_1)，(x_5,y_2)，(x_5,y_3)，(x_6,y_1)，(x_6,y_2)，(x_6,y_3)者，不符合相容性条件。我们不妨认为他们的身高体重比例不匀称。

设某男子身高 $x=x_4=1.8$米。符合相容性条件的体重集合为$\{y_4,y_5,y_6,y_7\}$，也就是说，如果此人比例匀称，那么他的体重应为70公斤以上。由于"x很高"对x_4的真值$A(x_4)=0.81>1/2$，根据假言推论规则，可以断言"y很重"对此人偏真。例如他的体重 $y=y_4=70$公斤时，则"y很重"对y_4的真值不低于$R(x_4,y_4)=0.64$；实际上真值$B(y_4)=0.64$。又例如他的体重为$y=y_5=80$公斤时，则"y很重"对y_5的真值不低于$R(x_4,y_5)=0.81$；实际上真值$B(y_5)=0.9$，超过0.81。

设某男子体重$y=y_3=60$公斤。符合相容性条件的身高集合为$\{x_1,x_2,x_3\}$，也就是说，如果此人比例匀称，那么他的身高应为1.7米以下。由于"y很重"对y_3的真值$B(y_3)=0.36<1/2$，根据拒取式规则，可以断言"x很高"对此人

偏假。例如他的身高 $x=x_1=1.5$米时，则"x很高"对 x_1 的真值为$1-\underset{\sim}{R}(x_1,y_3)_{,}=0$与$\underset{\sim}{A}(x_1)=0$吻合。又例如他的身高 $x=x_3=1.7$ 米时，则"x很高"对 x_3 的真值为 $1-R(x_3,y_3)=0.49$，也正好与$\underset{\sim}{A}(x_3)=0.49$相同。

§6.5 似然推理

人们日常思考问题时，常有这样近似推理方法，以"若x小，则y大"为依据，由x很小判断y很大，由x略小判断y略大，这种推理过程，可以看作一种Fuzzy集合变换，它将"x很小"与"x略小"的真域$\underset{\sim}{A}'$与$\underset{\sim}{A}''$分别变换为"y很大"与"y略大"的真域$\underset{\sim}{B}'$与$\underset{\sim}{B}''$。这种推理方法叫做似然推理。它是二值逻辑演绎推理在另一种意义下的推广。

一、普通关系的投影与截影

普通关系的投影与截影是研究普通集合变换的工具，并对似然推理的开发产生积极的作用。

定义1 设$R\in\mathscr{P}(X\times Y)$是从论域$X$到论域$Y$的普通关系。令

$R_X=\{x|\exists\ (x,y)\in R\}$，称$R_X\in\mathscr{P}(X)$为$R$在$X$上的投影，令

$R_Y=\{y|\exists(x,y)\in R\}$，称$R_Y\in\mathscr{P}(Y)$为$R$在$Y$上的投影。

R_X与R_Y的几何解释见图1。显然有

$$R_X(x)=\bigvee_{y\in Y}R(x,y),$$

$$R_Y(y)=\bigvee_{x\in X}R(x,y),$$

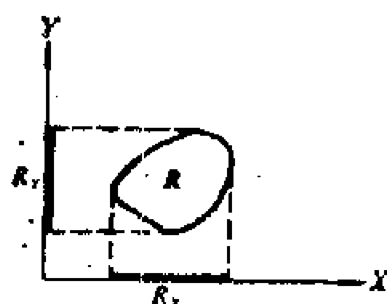


图 1

定义2 设$R\in\mathscr{P}(X\times Y)$。对固定的$x\in X$，称

$$R|_x=\{y|(x,y)\in R\}\in\mathscr{P}(Y)$$

为R在x处的截影。对固定的$y\in Y$，称

$$R|_y=\{x|(x,y)\in R\}\in\mathscr{P}(X)$$

为R在y处的截影。$R|_x$及$R|_y$的几何解释分别见 图2 及 图3。显然有

$$R|_x(y)=R|_y(x)=R(x,y).$$

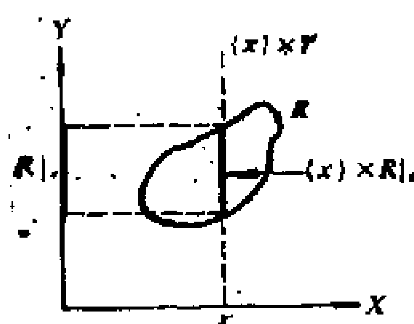


图2

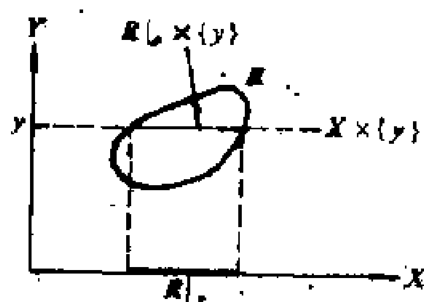


图3

性质1 $R_X=\bigcup\limits_{y\in Y}R|_y$，$R_Y=\bigcup\limits_{x\in X}R|_x$

证 以第一式为例，对任何$x\in X$，有

$$R_X(x)=\bigvee_{y\in Y}R(x,y)=\bigvee_{y\in Y}R|_y(x)$$

$$=(\bigcup_{y\in Y}R|_y)(x).$$

□

性质2 $R=\bigcup_{x\in X}\{x\}\times R|_x=\bigcup_{y\in Y}R|_y\times\{y\}.$

证 对每个$(x',y')\in X\times Y$，我们有

$$(\bigcup_{x\in X}\{x\}\times R|_x)(x',y')=\bigvee_{x\in X}(\{x\}(x')\wedge R|_x(y'))$$

$$=R|_{x'}(y')=R(x',y').$$

所以$R=\bigcup_{x\in X}\{x\}\times R|_x$。同理可证$R=\bigcup_{y\in Y}R|_y\times\{y\}$。 □

从图2及图3可以看出这两个性质的几何解释。此外，还易知

性质3 $R|_x=((\{x\}\times Y)\cap R)_Y,$

$R|_y=((X\times\{y\})\cap R)_X.$

性质4 如果$R\subseteq S$，则

$R_X\subseteq S_X$ ，$R_Y\subseteq S_Y$；

$R|_x\subseteq S|_x$，$R|_y\subseteq S|_y$。

这两个性质的证明留给读者。

给定普通关系$R\in\mathscr{P}(X\times Y)$。它可诱导一个从$X$到$Y$的普通集合变换。

$$t:\mathscr{P}(X)\to\mathscr{P}(Y)$$

$$t(A')=((A'\times Y)\cap R)_Y.$$

映射t将$A'\in\mathscr{P}(X)$变换为$t(A')\in\mathscr{P}(Y)$。$t(A')$的特征函数值是

$$t(A')(y)=((A'\times Y)\cap R)_Y(y)$$

$$=\bigvee_{x\in X}((A'\times Y)\cap R)(x,y)$$

$$= \bigvee_{x \in X} [A'(x) \wedge Y(y) \wedge R(x,y)]$$
$$= \bigvee_{x \in X} [A'(x) \wedge R(x,y)]$$
$$= (A' \circ R)(y).$$

所以

$$t(A') = ((A' \times Y) \cap R)_Y = A' \circ R.$$

不仅如此，R还可以诱导一个从Y到X的普通集合变换

$$t^{-1}: \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X),$$
$$t^{-1}(B') = ((X \times B') \cap R)_X.$$

$t^{-1}(B')$的特征函数值是

$$t^{-1}(B')(x) = ((X \times B') \cap R)_X(x)$$
$$= \bigvee_{y \in Y} ((X \times B') \cap R)(x,y)$$
$$= \bigvee_{y \in Y} [X(x) \wedge B'(y) \wedge R(x,y)]$$
$$= \bigvee_{y \in Y} [B'(y) \wedge R^T(y,x)]$$
$$= (B' \circ R^T)(x).$$

所以

$$t^{-1}(B') = ((X \times B') \cap R)_X = B' \circ R^T.$$

我们在§1.3中曾经说过，从X到Y的映射

$$f: X \to Y$$

是从X到Y的普通关系R的一种特殊形态，

$$R = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \in \mathscr{P}(X \times Y).$$

因此从映射f诱导普通集合变换存在着两种不同方式。一种以映射f的扩展原则为依据，

$$f: \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(Y);$$

此时对$A' \in \mathscr{P}(X)$应有

$$f(A')(y) = \bigvee_{x \in f^{-1}(y)} A'(x) .$$

另一种以本节引进的普通关系的投影为依据，

$$t: \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(Y);$$

此时对$A' \in \mathscr{P}(X)$应有

$$t(A') = ((A' \times Y) \cap R)_Y = A' \circ R.$$

但是由于

$$\begin{aligned} t(A')(y) &= (A' \circ R)(y) \\ &= \bigvee_{x \in X} [A'(x) \wedge R(x, y)] \\ &= \bigvee_{x \in f^{-1}(y)} [A'(x) \wedge R(x, f(x)] \\ &= \bigvee_{x \in f^{-1}(y)} A'(x) \\ &= f(A')(y) \end{aligned}$$

所以对任何$A' \in \mathscr{P}(X)$均有

$$t(A') = f(A').$$

由此可见，两种方式给出同样的结果。

类似地，对任何$B' \in \mathscr{P}(Y)$，以扩展原则为依据而算出的$f^{-1}(B')$等于以普通关系的投影为依据而算出的$t^{-1}(B)'$。

二、普通推理句$(a(x) \to b(y))$与普通集合变换

设普通判断句"x是a"与"y是b"的真域分别是$A \in \mathscr{P}(X)$及$B \in \mathscr{P}(Y)$。推理句"若x是a，则y是b"的真域$R = (A^c \times Y) \cup (A \times B) \in \mathscr{P}(X \times Y)$可以看作从$X$到$Y$的一个普通关系。根据刚才的说明，$R$诱导从$X$到$Y$的普通集合变换

$$t_R: \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(Y),$$

$$t_R(A') = ((A' \times Y) \cap R)_Y,$$
$$= [(A' \times Y) \cap (A^c \times Y) \cup (A \times B)]_Y,$$

以及从Y到X的普通集合变换

$$t_R^{-1}: \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X),$$
$$t_R^{-1}(B') = ((X \times B') \cap R)_X$$
$$= [(X \times B') \cap ((A^c \times Y) \cup (A \times B))]_X.$$

我们用到这两个集合变换的一些性质。

引理1　若$(x, y) \in R$且$x \in A'$，则$y \in t_R(A')$。

证　因为$(x, y) \in R$且$x \in A'$，所以$(x, y) \in (A' \times Y) \cap R$。于是$y \in ((A' \times Y) \cap R)_Y$，即$y \in t_R(A')$。　□

引理2　给定非空集$A' \in \mathscr{P}(X)$。

(i)　若$A' \subseteq A$，则$t_R(A') = B$；

(ii)　若A'不被包含A，则$t_R(A') = Y$。

证　(i)设$A' \subseteq A$・于是

$$t_R(A') = [(A' \times Y) \cap ((A^c \times Y) \cup (A \times B))]_Y$$
$$= [((A' \cap A^c) \times Y) \cup ((A' \cap A) \times B)]_Y$$
$$= (A' \times B)_Y = B.$$

(ii)　$$t_R(A') = [(A' \times Y) \cap ((A^c \times Y) \cup (A \times B))]_Y$$
$$= [((A' \cap A^c) \times Y) \cup ((A' \cap A) \times B]_Y$$
$$\supseteq [(A' \cap A^c) \times Y]_Y$$

由于$A' \cap A^c \neq \phi$，故$[(A' \cap A^c) \times Y]_Y = Y$。因此

$$t_R(A') = Y.$$　□

引理3　若$(x, y) \in R$且$y \in B'$则$x \in t_R^{-1}(B')$。

证　因为$(x, y) \in R$且$y \in B'$，所以$(x, y) \in (X \times B') \cap R$。于是$x \in [(X \times B') \cap R]_X$，即$x \in t_R^{-1}(B')$。　□

引理4　给定非空集$B' \in \mathscr{P}(Y)$。

(i) 若$(B)\subseteq B^c$，则$t_R^{-1}(B')=A^c$；

(ii) 若$B'\not\subseteq B^c$，则$t_R^{-1}(B')=X$。

证 (i) $B'\subseteq B^c$。于是

$$t_R^{-1}(B')=[(X\times B')\cap((A^c\times Y)\cup(A\times B))]_X$$
$$=[(A^c\times B')\cup(A\times(B'\cap B))]_X$$
$$(A^c\times B')_X=A^c。$$

(ii)
$$t_R^{-1}(B')=[(X\times B')\cap((A^c\times Y)\cup(A\times B))]_X$$
$$=[(A^c\times B')\cup(A\times(B'\cap B)]_X$$
$$=(A^c\times B')_X\cup(A\times(B'\cap B))_X$$
$$=A^c\cup A=X。$$
□

设$(x,y)\in R$。当$x\in A$时，根据引理1及引理2(i)，我们得知$y\in B$。换句话说，由$(a(x)\to b(y))$对(x,y)真且对x真，推出(b)对y真，这与二值逻辑的假言推论规则吻合。当$x\in A^c$时，根据引理1及引理2(ii)，我们仅能得知$y\in Y$，无法判断y是否属于B。这意味着当(a)对x假，即当前提不成立时，无法判断结论的真假。这与二值逻辑中演绎推理也是一致的。

仍设$(x,y)\in R$。当$y\in B^c$时，根据引理3及引理4(i)，我们知$x\in A^c$。换句话说，由$(a(x)\to b(y))$对(x,y)真且(b)对y假，推出(a)对x假，这与二值逻辑中的拒取式规则吻合。当$y\in B$时，根据引理3及引理4(ii)，我们仅能得知$x\in X$，无法判断x是否属于A，换句话说，由结论成立无法判断前提的真假，这与二值逻辑中演绎推理也是一致的。

上述分析说明可以把二值逻辑中演绎推理看作由普通推理句的真域诱导的普通集合变换。将这种想法推广到模糊情形就成为似然推理。

三、似然推理规则

设$R\in\mathscr{F}(X\times Y)$为"若$x$是$a$,则$y$是$b$"的真域。由$R$可以诱导一个从$X$到$Y$的Fuzzy集合变换$t_R$以及一个从$Y$到$X$的Fuzzy集合变换$t_R^{-1}$,

$$t_R: \mathscr{F}(X)\rightarrow\mathscr{F}(Y),\quad A'\longmapsto B'=A'\circ R;$$

$$t_R^{-1}: \mathscr{F}(Y)\rightarrow\mathscr{F}(X),\quad B'\longmapsto A'=B\circ R^T.$$

其中$R^T\in\mathscr{F}(Y\times X)$为$R$转置。

由此引进似然推理规则如下:

(1) 设Fuzzy推理句"若x是a,则y是b"的真域$R\in\mathscr{F}(X\times Y)$,又设Fuzzy判断句"$x$是$a'$"的真域为$A'\in\mathscr{F}(X)$。我们规定,$B'=A\circ R\in\mathscr{F}(Y)$为某个Fuzzy判断句"$y$是$b'$"的真域

(2) 设Fuzzy推理句"若x是a,则y是b"的真域$R\in\mathscr{F}(X\times Y)$,又设Fuzzy判断句"$y$是$b'$"的真域为$B'\in\mathscr{F}(Y)$。我们规定$A'=B'\circ R^T\in\mathscr{F}(X)$为某个Fuzzy判断句"$x$是$a'$"的真域。

这两条规则相当于演绎推理中的假言推论与拒取式。似然推理好比变换器,如图4所示。

在二值逻辑中,$(a(x)\rightarrow b(y))$的真域

$$\left.\begin{array}{l}R=(A^c\times Y)\cup(A\times B),\\ R(x,y)=(1-A(x))\vee(A(x)\wedge B(y)).\end{array}\right\}\qquad(1)$$

推广到模糊情形,$R(x,y)$可以有许多不同的形式,由此可以得到许多不同的似然推理模型。

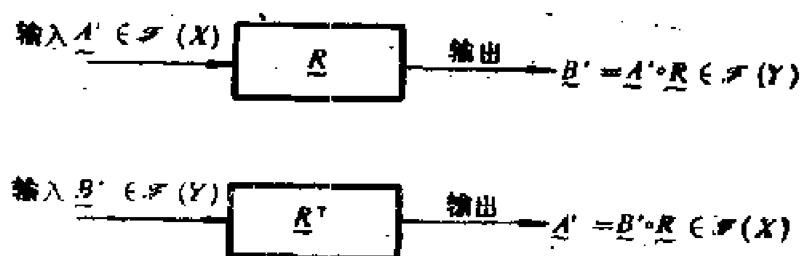


图4

列举如下.

(1) $\underset{\sim}{R}^{(1)} = (\underset{\sim}{A}^c \times Y) \cup (\underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{B})$,

$\underset{\sim}{R}^{(1)}(x,y) = (1 - \underset{\sim}{A}(x)) \vee (\underset{\sim}{A}(x) \wedge \underset{\sim}{B}(y))$.

(2) $\underset{\sim}{R}^{(2)} = (\underset{\sim}{A}^c \times Y) \cup (X \times \underset{\sim}{B})$,

$\underset{\sim}{R}^{(2)}(x,y) = (1 - \underset{\sim}{A}(x)) \vee \underset{\sim}{B}(y)$.

(3) $\underset{\sim}{R}^{(3)}(x, y) = \urcorner \underset{\sim}{A}(x) \ominus \underset{\sim}{B}(y) = (1 - \underset{\sim}{A}(x) + \underset{\sim}{B}(y)) \wedge 1$.

(4) $\underset{\sim}{R}^{(4)}(x, y) = \urcorner \underset{\sim}{A}(x) \hat{+} \underset{\sim}{B}(y) = 1 - \underset{\sim}{A}(x) + \underset{\sim}{A}(x) \underset{\sim}{B}(y)$.

(5) $$\underset{\sim}{R}^{(5)}(x,y) = \begin{cases} 1 & \underset{\sim}{A}(x) \leqslant \underset{\sim}{B}(y) \\ 0 & \underset{\sim}{A}(x) > \underset{\sim}{B}(y) \end{cases}.$$

(6) $$\underset{\sim}{R}^{(6)}(x,y) = \begin{cases} 1 & \underset{\sim}{A}(x) \leqslant \underset{\sim}{B}(y) \\ \underset{\sim}{B}(y) & \underset{\sim}{A}(x) > \underset{\sim}{B}(y) \end{cases}.$$

(7) $$\underset{\sim}{R}^{(7)}(x,y) = \begin{cases} 1 & \underset{\sim}{A}(x) \leqslant \underset{\sim}{B}(y) \\ \underset{\sim}{A}(x)\underset{\sim}{B}(y) & \underset{\sim}{A}(x) > \underset{\sim}{B}(y). \end{cases}$$

(8) $$\underset{\sim}{R}^{(8)}(x,y) = \begin{cases} 1 & \underset{\sim}{A}(x) \leqslant \underset{\sim}{B}(y) \\ (1-\underset{\sim}{A}(x)) \wedge \underset{\sim}{B}(y) & \underset{\sim}{A}(x) > \underset{\sim}{B}(y) \end{cases}$$

(9) $$\underset{\sim}{R}^{(9)}(x,y)=\begin{cases}1 & \underset{\sim}{A}(x)\leqslant\underset{\sim}{B}(y)\\ 1-\underset{\sim}{A}(x) & \underset{\sim}{A}(x)>\underset{\sim}{B}(y)\end{cases}$$

(10) $$\underset{\sim}{R}^{(10)}(x,)y=\begin{cases}1 & \underset{\sim}{A}(x)\leqslant\underset{\sim}{B}(y)\\ (1-\underset{\sim}{A}(x))\underset{\sim}{B}(y) & \underset{\sim}{A}(x)>\underset{\sim}{B}(y)\end{cases}$$

若限制$\underset{\sim}{A}(x)$，$\underset{\sim}{B}(y)\in\{0,1\}$，则这十种形式都蜕化为式(1)，即

$$\underset{\sim}{R}^{k}(x,y)=\begin{cases}1 & 当\ \underset{\sim}{A}(x)=0或\ \underset{\sim}{A}(x)=\underset{\sim}{B}(y)=1\\ 0 & 当\ \underset{\sim}{A}(x)=1且\underset{\sim}{B}(y)=0.\end{cases}$$

因此它们都可以看作式(1)的推广.

例1 设$X=Y=\{1,2,3,4,5\}$.定义

$$[短]=\frac{1}{1}+\frac{0.5}{2}+\frac{0.1}{3}=(1,0.5,0.1,0,0),$$

$$[长]=\frac{0.1}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{1}{5}=(0,0,0.1,0.5,1).$$

Fuzzy 推理句"若x短，则y长"的十种真域模型分别用下列5×5Fuzzy 方阵表示.

$$\underset{\sim}{R}^{(1)}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0.1 & 0.5 & 1\\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5\\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$R^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.9 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.6 & 1 & 1 \\ 0.9 & 0.9 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.55 & 0.75 & 1 \\ 0.9 & 0.9 & 0.91 & 0.95 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0.1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R}^{(7)}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0.1 & 0.5 & 1\\0 & 0 & 0.05 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R}^{(8)}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0.1 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R}^{(9)}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 & 1\\0.9 & 0.9 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R}^{(10)}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0.05 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

为了检验上述模型的好坏，可令 $\underset{\sim}{A}'=\underset{\sim}{A}=$〔短〕，比较 $\underset{\sim}{A}'\circ\underset{\sim}{R}^{(k)}$与$\underset{\sim}{B}=$〔长〕的近似程度；并令 $\underset{\sim}{B}'=\underset{\sim}{B}^c=$〔长〕^{c}，比较 $\underset{\sim}{B}'\circ\underset{\sim}{R}^{(k)T}$与$\underset{\sim}{A}^c=$〔短〕^{c} 的近似程度。

$$\underset{\sim}{A}=[\text{短}]=(1,0.5,0.1,0,0),$$

$$\underset{\sim}{A}^{c}=(0,0.5,0.9,1,1);$$

$$\underset{\sim}{B}=[\text{长}]=(0,0,0.1,0.5,1),$$

$$\underset{\sim}{B}^{c}(1,1,0.9,0.5,0).$$

经过计算，我们有如下结果：

$$\underset{\sim}{A}\circ \underset{\sim}{R}^{(1)}=(0.5,0.5,0.5,0.5,1)\approx \underset{\sim}{B}$$

$$\underset{\sim}{A}\circ \underset{\sim}{R}^{(2)}=(0.5,0.5,0.5,0.5,1)\approx \underset{\sim}{B},$$

$$\underset{\sim}{A}\circ \underset{\sim}{R}^{(3)}=(0.5,0.5,0.5,0.5,1)\approx \underset{\sim}{B},$$

$$\underset{\sim}{A}\circ \underset{\sim}{R}^{(4)}=(0.5,0.5,0.5,0.5,1)\approx \underset{\sim}{B},$$

$$\underset{\sim}{A}\circ \underset{\sim}{R}^{(5)}=(0,0,0.1,0.5,1)=\underset{\sim}{B},$$

$$\underset{\sim}{A}\circ \underset{\sim}{R}^{(6)}=(0,0,0.1,0.5,1)=\underset{\sim}{B},$$

$$\underset{\sim}{A}\circ \underset{\sim}{R}^{(7)}=(0,0,0.1,0.5,1)=\underset{\sim}{B},$$

$$\underset{\sim}{A}\circ \underset{\sim}{R}^{(8)}=(0,0,0.1,0.5,1)=\underset{\sim}{B},$$

$$\underset{\sim}{A}\circ \underset{\sim}{R}^{(9)}=(0.5,0.5,0.5,0.5,1)\approx \underset{\sim}{B}$$

$$\underset{\sim}{A}\circ \underset{\sim}{R}^{(10)}=(0,0,0.1,0.5,1)=\underset{\sim}{B};$$

另一方面，

$$\underset{\sim}{B}^{c}\circ \underset{\sim}{R}^{(1)T}=(0.5,0.5,0.9,1,1)\approx \underset{\sim}{A}^{c},$$

$$\underset{\sim}{B}^{c}\circ \underset{\sim}{R}^{(2)T}=(0.5,0.5,0.9,1,1)\approx \underset{\sim}{A}^{c},$$

$$\underset{\sim}{B}^{c}\circ \underset{\sim}{R}^{(3)T}=(0.5,0.6,0.9,1,1)\approx \underset{\sim}{A}^{c},$$

$$B^c \circ R^{(4)T} = (\underline{0.5}, \underline{0.55}, 0.9, 1, 1) \approx A^c,$$

$$B^c \circ R^{(5)T} = (0, 0.5, 0.9, 1, 1) = A^c,$$

$$B^c \circ R^{(6)T} = (\underline{0.5}, 0.5, 0.9, 1, 1) \approx A^c,$$

$$B^c \circ R^{(7)T} = (\underline{0.5}, 0.5, 0.9, 1, 1) \approx A^c,$$

$$B^c \circ R^{(8)T} = (0, 0.5, 0.9, 1, 1) = A^c,$$

$$B^c \circ R^{(9)T} = (0, 0.5, 0.9, 1, 1) = A^c,$$

$$B^c \circ R^{(10)T} = (0, 0.5, 0.9, 1, 1) = A^c.$$

结果 $A \circ R^{(k)} \approx B$, $B \circ R^{(k)T} \approx A^c$. 划横线处表示有误差. 误差出现在隶属较小处. 看来这十种模型都可以应用. 模型 $R^{(5)}$、$R^{(8)}$、$R^{(10)}$在正反两方面都未出现误差

下面利用上述十个模型进行似然推理.

(1) 已知"x略短", 问y如何?

$$A' = [略短] = H_{1/2}([短]) = (\sqrt{1}, \sqrt{0.5}, \sqrt{0.1}, 0, 0) = (1, 0.7, 0.3, 0, 0).$$

$$A' \circ R^{(1)} = (\underline{0.5}, \underline{0.5}, \underline{0.5}, 0.5, 1) \approx [长],$$

$$A' \circ R^{(2)} = (\underline{0.5}, \underline{0.5}, \underline{0.5}, 0.5, 1) \approx [长],$$

$$A' \circ R^{(3)} = (\underline{0.5}, \underline{0.5}, \underline{0.6}, 0.7, 1) \approx [略长],$$

$$A' \circ R^{(4)} = (\underline{0.5}, 0.5, \underline{0.55}, 0.7, 1) \approx [略长],$$

$$A' \circ R^{(5)} = (0, 0, 0.3, 0.7, 1) = [略长],$$

$$A' \circ R^{(6)} = (0,0,0.3,0.7,1) = [\text{略长}],$$

$$A' \circ R^{(7)} = (0,0,0.3,0.7,1) = [\text{略长}],$$

$$A' \circ R^{(8)} = (0,0,0.3,0.7,1) = [\text{略长}],$$

$$A' \circ R^{(9)} = (\underline{0.5},\underline{0.5},\underline{0.5},0.5,0.7,1) \approx [\text{略长}],$$

$$A' \circ R^{(10)} = (0,0,0.3,0.7,1) = [\text{略长}].$$

其中，

$$[\text{略长}] = H_{1/2}([\text{长}]) = (0,0,\sqrt{0.1},\ \sqrt{0.5}\ ,1)$$
$$= (0,0,0.3,0.7,1).$$

模型$R^{(1)}$，$R^{(2)}$判断"y近似长"，未加语气，大体符合人们的思想实际；模型$R^{(3)}$，$R^{(4)}$，$R^{(9)}$判断"y近似略长"比$R^{(1)}$，$R^{(2)}$的判断更接近人们的思想实际；模型$R^{(5)}$，$R^{(6)}$，$R^{(7)}$，$R^{(8)}$，$R^{(10)}$判断"y略长"，完全符合人们的思想实际。

(2) 已知"y不很长"，问x如何？

$$[\text{很长}] = H_2([\text{长}]) = (0,0,0.1^2,0.5^2,1^2)$$
$$= (0,0,0.01,0.25,1)$$

$$B' = [\text{不很长}] = [\text{很长}]^c$$
$$= (1,1,0.99,0.75,0)$$

$$B' \circ R^{(1)T} = (\underline{0.5},0.5,0.9,1,1) \approx [\text{不短}],$$

$$B' \circ R^{(2)T} = (\underline{0.5},0.5,0.9,1,1) \approx [\text{不短}],$$

$$B' \circ R^{(3)T} = (\underline{0.5},0.75,0.99,1.1) \approx [\text{不很短}],$$

$$B' \circ R^{(4)T} = (0.5, 0.75, 0.91, 1, 1) \approx [不很短],$$
$$B' \circ R^{(5)T} = (0, 0.75, 0.99, 1, 1) = [不很短],$$
$$B' \circ R^{(6)T} = (0.5, 0.75, 0.99, 1, 1) \approx [不很短],$$
$$B' \circ R^{(7)T} = (0.5, 0.75, 0.99, 1, 1) \approx [不很短],$$
$$B' \circ R^{(8)T} = (0, 0.75, 0.99, 1, 1) = [不很短],$$
$$B' \circ R^{(9)T} = (0, 0.75, 0.99, 1, 1) = [不很短],$$
$$B' \circ R^{(10)T} = (0, 0.75, 0.99, 1, 1) = [不很短].$$

其中

$$[很短] = H_2([短]) = (1, 0.25, 0.01, 0, 0),$$
$$[不很短] = [很短]^c = (0, 0.75, 0.99, 1, 1).$$

模型$R^{(1)}$，$R^{(2)}$判断"x近似不短"，未加语气，大体符合人们的思想实际；模型$R^{(3)}$，$R^{(4)}$，$R^{(6)}$，$R^{(7)}$判断"x近似不很短"比$R^{(1)}$，$R^{(2)}$的判断更符合人们的思想实际；模型$R^{(5)}$，$R^{(8)}$，$R^{(9)}$，$R^{(10)}$判断"x不很短"，完全符合人们的思想实际.

透过以上分析可以看出，模型$R^{(5)}$，$R^{(8)}$，$R^{(10)}$对本问题的效果最好，$R^{(6)}$，$R^{(7)}$，$R^{(9)}$次之，$R^{(3)}$，$R^{(4)}$又次之；它们都胜于$R^{(1)}$，$R^{(2)}$. $R^{(1)}$，$R^{(2)}$是最容易想到的两种模型，其它模型可以认为是对$R^{(1)}$，$R^{(2)}$的改进。$R^{(3)}$，$R^{(4)}$乃是将$R^{(2)}$中的算子$\vee$分别换成有界和$\oplus$代数和$\dotplus$；至于$R^{(5)}$，$R^{(6)}$，$R^{(7)}$，$R^{(8)}$，$R^{(9)}$，$R^{(10)}$涉及真域R的Fuzzy关系方程组的解，下节将详加阐述。

简短地说，$\underset{\sim}{R}^{(6)}$，$\underset{\sim}{R}^{(7)}$是Fuzzy关系方程$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}=\underset{\sim}{B}$的解，其中$\underset{\sim}{R}^{(6)}$是最大解．$\underset{\sim}{R}^{(9)}$是Fuzzy关系方程$\underset{\sim}{B}^c\circ\underset{\sim}{R}^T=\underset{\sim}{A}^c$的最大解．$\underset{\sim}{R}^{(5)}$，$\underset{\sim}{R}^{(8)}$，$\underset{\sim}{R}^{(10)}$是$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}=\underset{\sim}{B}$与$\underset{\sim}{B}^c\circ\underset{\sim}{R}^T=\underset{\sim}{A}^c$的公共解，其中$\underset{\sim}{R}^{(8)}$是最大公共解，因而$\underset{\sim}{R}^{(5)}$，$\underset{\sim}{R}^{(8)}$，$\underset{\sim}{R}^{(10)}$的效果最好．$\underset{\sim}{R}^{(6)}$，$\underset{\sim}{R}^{(7)}$在第一类正向似然推理中效果相当于$\underset{\sim}{R}^{(5)}$，$\underset{\sim}{R}^{(8)}$，$\underset{\sim}{R}^{(10)}$，但在第二类反向似然推理中则出现误差．$\underset{\sim}{R}^{(9)}$正好倒过来，在第二类似然推理中等效于$\underset{\sim}{R}^{(5)}$，$\underset{\sim}{R}^{(8)}$，$\underset{\sim}{R}^{(10)}$，但在第一类似然推理中则出现误差．一般地说，当方程$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}=\underset{\sim}{B}$与$\underset{\sim}{B}^c\circ\underset{\sim}{R}^T=\underset{\sim}{A}^c$联立有公共解时，采用最大公共解$\underset{\sim}{R}^{(8)}$比较理想；但是当公共解不存在时，由于$\underset{\sim}{R}^{(8)}$或者不满足$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}=\underset{\sim}{B}$，或者不满足$\underset{\sim}{B}^c\circ\underset{\sim}{R}^T=\underset{\sim}{A}^c$，因而效果反不及$\underset{\sim}{R}^{(6)}$，$\underset{\sim}{R}^{(9)}$．另外，如果仅考虑第一类似然推理，则$\underset{\sim}{R}^{(6)}$的效果最好；如果仅考虑第二类似然推理，则$\underset{\sim}{R}^{(9)}$最好．

从以上例子看出，似然推理概念模糊的情况下，很接近人们的思想实际．它与Fuzzy演绎推理的区别在于，它不仅能在前提与推理句一致的情况下，得到与推理句一致的结论，而且在前提近似满足的情况下，得到相应的近似结果．两者相比，更显出似然推理的优越性．

§ 6.6 确定似然推理数学模型的Fuzzy关系方程组

设“x是a”与“y是b”的真域分别为$\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(X)$与$\underset{\sim}{B}\in$

$\mathscr{F}(Y)$.我们在前节中看到，似然推理的数学模型完全由Fuzzy推理句"若x是a，则y是b"的真域$\underset{\sim}{R}\in\mathscr{F}(X\times Y)$来决定。$\underset{\sim}{R}$应同时适应两个等式

$$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}=\underset{\sim}{B},$$

$$\underset{\sim}{B}^{c}\circ\underset{\sim}{R}^{T}=\underset{\sim}{A}^{c}.$$

这两个等式可视为Fuzzy关系方程组，$\underset{\sim}{R}$为未知关系。对于有限论域X以及有限论域Y，以下运用§4.2的理论来确定真域$\underset{\sim}{R}$.

命题1 Fuzzy关系方程

$$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}=\underset{\sim}{B} \tag{I}$$

有解的充分必要条件是：对任意$y\in Y$，存在着$x\in X$，使得$A(x)\geqslant\underset{\sim}{B}(y)$。还有，在此条件下，方程(I)的最大解$\bar{P}\in\mathscr{F}(X\times Y)$是

$$\underset{\sim}{\bar{P}}(x,y)=\begin{cases}1 & \underset{\sim}{A}(x)\leqslant\underset{\sim}{B}(y)\\ \underset{\sim}{B}(y) & \underset{\sim}{A}(x)>\underset{\sim}{B}(y)\end{cases} \tag{2}$$

证 关于有解的充分必要条件已详见§4.2引理1，这里不必重复。我们搞清楚方程(I)的最大解就够了。根据§4.2定理1，最大解$\underset{\sim}{\bar{P}}$是$\underset{\sim}{A}\overset{\circ}{\beta}\underset{\sim}{B}$.于是，

$$\underset{\sim}{\bar{P}}(x,y)=(\underset{\sim}{A}\overset{\circ}{\beta}\underset{\sim}{B})(x,y)=\underset{\sim}{A}(x)\alpha\underset{\sim}{B}(y)$$

$$=\begin{cases}1 & \underset{\sim}{A}(x)\leqslant B(y)\\ B(y) & \underset{\sim}{A}(x)>\underset{\sim}{B}(y)\end{cases}.$$

这正是希望得到的结果。 □

平行地成立着

命题2 Fuzzy关系方程

$$B^c \circ R^T = A^c \tag{II}$$

有解的充分必要条件是：对任意 $x \in X$，存在着 $y \in Y$，使得 $A(x) \geqslant B(y)$。还有，在此条件下，方程(II)的最大解 $\overline{Q} \in \mathscr{F}(X \times Y)$ 是

$$\overline{Q}(x,y)=\begin{cases}1 & A(x)\leqslant B(y)\\ 1-A(x) & A(x)>B(y)\end{cases} \tag{3}$$

证 把§4.2引理1用方程(II)。它有解的充分必要条件是

$$\forall x \in X,\ \exists\ y \in Y,\ 使 B^c(y) \geqslant A^c(x)$$

$$\Longleftrightarrow \forall x \in X,\ \exists\ y \in Y,\ 使 A(x) \geqslant B(y).$$

在此条件下，方程(II)的最大解 $\overline{Q} = (B^c \overset{\circ}{\beta} A^c)^T$，

$$\overline{Q}(x,y) = (B^c \overset{\circ}{\beta} A^c)^T(x,y) = (B^c \overset{\circ}{\beta} A^c)(y,x)$$

$$= B^c(y) \alpha A^c(x)$$

$$=\begin{cases}1 & B^c(y)\leqslant A^c(x)\\ A^c(x) & B^c(y)>A^c(x)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1 & A(x)\leqslant B(y)\\ 1-A(x) & A(x)>B(y)\end{cases}.$$ □

命题3 Fuzzy关系方程组

$$\begin{cases} A \circ R = B \\ B^c \circ R^T = A^c \end{cases} \qquad (\text{I}) + (\text{II})$$

有公共解的充分必要条件是：对$\forall y \in Y$，$\exists x \in X$，使$A(x) = B(y)$或者使$A(x) \wedge (1 - A(x)) \geqslant B(y)$；并且对$\forall x \in X$，$\exists y \in Y$，使$A(x) = B(y)$或者使$A(x) > B(y) \geqslant 1 - A(x)$。还有，在此条件下，方程组（Ⅰ）＋（Ⅱ）有最大公共解$\overline{R} \in \mathscr{F}(X \times Y)$，

$$\overline{R}(x, y) = \begin{cases} 1 & A(x) \leqslant B(y) \\ (1 - A(x)) \wedge B(y) & A(x) > B(y) \end{cases} \qquad (4)$$

证 令

$$\overline{P}(x, y) = \begin{cases} 1 & A(x) \leqslant B(y) \\ B(y) & A(x) > B(y) \end{cases},$$

$$\overline{Q}(x, y) = \begin{cases} 1 & A(x) \leqslant B(y) \\ 1 - A(x) & A(x) > B(y) \end{cases},$$

$$\overline{R}(x, y) = \begin{cases} 1 & A(x) \leqslant B(y) \\ (1 - A(x)) \wedge B(y) & A(x) > B(y) \end{cases} \qquad (5)$$

明显地，$\overline{R} = \overline{P} \cap \overline{Q}$。

甲．必要性。设R为（Ⅰ）＋（Ⅱ）的任意公共解。利用命题1及命题2，$\overline{P}$，$\overline{Q}$分别为（Ⅰ）与（Ⅱ）的最大解。于是

$R \subseteq P$ 且 $R \subseteq Q$，从而得 $R \subseteq P \cap Q = \bar{R}$。由于

$$R \subseteq \bar{R} \subseteq \bar{P} \quad 且 \quad R \subseteq \bar{R} \subseteq \bar{Q},$$

所以

$$B = A \circ R \subseteq A \circ \bar{R} \subseteq A \circ \bar{P} = B,$$

且

$$A^c = B^c \circ R^T \subseteq B^c \circ \bar{R}^T \subseteq B^c \circ \bar{Q}^T = A^c.$$

由此

$$\begin{cases} A \circ \bar{R} = B \\ B^c \circ \bar{R}^T = A^c. \end{cases}$$

可见 $\bar{R}$ 是方程组(I)+(II)的最大公共解。

由式(5)知

$$A(x) \wedge R(x,y) \begin{cases} \leqslant B(y) & 当 A(x) < B(y), \\ = B(y) & 当 A(x) = B(y), \\ < B(y) & 当 A(x) > B(y) 且 1-A(x) < B(y), \\ = B(y) & 当 A(x) > B(y) 且 1-A(x) \geqslant B(y). \end{cases} \tag{6}$$

对任意 $y \in Y$，前面已证明了等式 $\bigvee_{x \in X}[A(x) \cap R(x,y)] = B(y)$ 的正确性，因而存在着 $x \in X$ 使 $A(x) = B(y)$ 或者使 $A(x) \wedge (1-A(x)) \geqslant B(y)$。

不仅如此，仍由式(5)知

$$B^c(y) \wedge R^T(y,x) = (1-B(y)) \wedge \bar{R}(x,y)$$

$$
\begin{cases}
<1-A(x) & \text{当} A(x)<B(y), \\
=1-A(x) & \text{当} A(x)=B(y), \\
<1-A(x) & \text{当} A(x)>B(y) \text{且} B(y)<1-A(x), \\
=1-A(x) & \text{当} A(x)>B(y) \text{且} B(y)\geqslant 1-A(x).
\end{cases}
$$

对任意$x\in X$，前面已证明了等式$\bigvee_{y\in Y}[B^c(y)\wedge R^T(y,x)]=A^c(x)$的正确性，因而存在着$y\in Y$使$A(x)=B(y)$或者使$A(x)>B(y)\geqslant 1-A(x)$。

至此为止，必要性的确成立且R就是最大公共解。

乙。充分性。首先证明由式(5)确定的R满足方程(I)。为此，任取$y\in Y$。

$$(A\circ R)(y)=\bigvee_{x\in X}[A(x)\wedge R(x,y)] \quad ,$$

上式右端是在有限项中求最大值。我们把这些项$A(x)\wedge R(x,y)$按不同条件分成四类：

第一类的项适合条件$A(x)<B(y)$，

第二类的项适合条件$A(x)=B(y)$，

第三类的项适合条件$A(x)>B(y)$且$1-A(x)<B(y)$。

第四类的项适合条件$A(x)>B(y)$且$1-A(x)\geqslant B(y)$。

根据假设，存在着$x\in X$使$A(x)=B(y)$或者使$A(x)\wedge(1-A(x))\geqslant B(y)$，因此或者存在第二类项 或者存在第四类的项。利用式(6)的计算结果得出

$$(\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{\bar{R}})(y)=\Big(\bigvee_{\text{第二类}}[\underset{\sim}{A}(x)\wedge\underset{\sim}{R}(x,y)]\Big)$$

$$\vee\Big(\bigvee_{\text{第四类}}[\underset{\sim}{A}(x)\wedge\underset{\sim}{\bar{R}}(x,y)]\Big\}=\underset{\sim}{B}(y).$$

由此可见，$\underset{\sim}{\bar{R}}$的确满足方程(I)。同样方法证明$\underset{\sim}{\bar{R}}$满足方程(II).

总而言之，$\underset{\sim}{\bar{R}}$ 是方程组(I)+(II)的公共解。

不仅如此，我们在论证必要性的过程中已经看到，$\underset{\sim}{\bar{R}}$既然同时满足(I)+(II)，就非成为(I)+(II)的最大公共解不可。 □

推论 设A，B分别是有限论域X，Y上普通集，且普通关系方程组

$$\begin{cases}A\circ R=B\\ B^c\circ R^T=A^c\end{cases}$$

有公共解。那么$\bar{R}=(A^c\times Y)\cup(A\times B)$不但是方程组的最大公共解，而且也是方程$A\circ R=B$的最大解与方程$B^c\circ R^T=A^c$的最大解。

证 当A,B都是普通集合时，命题1的式(2)，命题2的式(3)，以及命题3的式(4)都统一地蜕化成

$$P(x,y)=\bar{Q}(x,y)=\bar{R}(x,y)=\begin{cases}1 & A(x)\leqslant B(x)\\ 0 & A(x)>B(x).\end{cases}$$

另外

$$((A^c\times Y)\cup(A\times B))(x,y)$$

$$= (1 - A(x)) \vee (A(x) \wedge B(y))$$

$$= \begin{cases} 1 & A(x) = 0 \text{或} A(x) = B(y) = 1 \\ 0 & A(x) = 1 \text{且} B(y) = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & A(x) \leqslant B(y) \\ 0 & A(x) > B(y). \end{cases}$$

于是

$$P = Q = R = (A^c \times Y) \cup (A \times B),$$

即命题 1、命题 2、命题 3 中三种最大解统一蜕化为 $(A^c \times Y) \cup (A \times B)$。 □

这几个命题指出，上节谈到的似然推理模型 $R^{(6)}$ 是方程 $A \circ R = B$ 的最大解（当方程可解时）。$R^{(9)}$ 是方程 $B^c \circ R^T = A^c$ 的最大解（当方程可解时）。$R^{(8)}$ 是方程组 $A \circ R = B$ 与 $B^c \circ R^T = A^c$ 的最大公共解（当公共解存在时）；$R^{(6)}$ 是普通关系方程组 $A \circ R = B$ 与 $R^c \circ R^T = A^c$ 的最大公共解，推广到模糊情形，$R^{(6)}$ 有可能成为 $A \circ R = B$ 与 $B^c \circ R^T = A^c$ 的公共解。$R^{(7)}$ 将 $R^{(6)}$ 中的值 $R^{(6)}(x, y) = B(y)$ 适当减少，有可能成为 $A \circ R = B$ 的解，也可能向 $R^{(8)}$ 靠近。类似地 $R^{(10)}$ 将 $R^{(9)}$ 中的值 $R^{(9)}(x, y) = 1 - A(x)$ 适当减少，有可能成为 $B^c \circ R^T = A^c$ 的解，也有可能向 $R^{(8)}$ 靠近，可以说，从 $R^{(5)}$ 到 $R^{(10)}$ 都是从真域的 Fuzzy 关系方程组出发考虑。一般来说，只要方程组的公共解存在，可首先考虑 $R^{(8)}$；当公共解不存，对第一类似

然推理则选择$R^{(8)}$，对第二类似推理则选择$R^{(9)}$.

§6.7 Fuzzy条件句与多段Fuzzy条件句

一、Fuzzy条件句

句型为“若x是a则y是b，否则y是c”的语句，称为条件句，记作$((a)\to(b),\ \neg(a)\to(c))$.

设$\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(X)$，$\underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{C}\in\mathscr{F}(Y)$分别是判断句$(a)$、$(b)$、$(c)$的真域，我们需要由$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{C}$来构造上述条件句的真域$R\in(X\times Y)$

先看普通条件句的真域．设A，B，C分别是(a)，(b)，(c)的真域，条件句$((a)\to(b),\ \neg(a)\to(c))$的真域

$$
\begin{aligned}
R&=\{(x,y)\mid(a(x)\to b(y))\text{对}(x,y)\text{真}\\
&\qquad\text{且}(\neg a(x)\to c(y))\text{对}(x,y)\text{真}\}\\
&=\{(x,y)\mid(a(x)\to b(y))\text{对}(x,y)\text{真}\}\\
&\quad\cap\{x,y\mid(\neg a(x)\to c(y))\text{对}(x,y)\text{真}\}\\
&=[(A^c\times Y)\cup(A\times B)]\cap[(A\times Y)\cup(A^c\times C)].
\end{aligned}
$$

由于

$$
\begin{aligned}
&[(A^c\times Y)\cup(A\times B)]\cap[(A\times Y)\cup(A^c\times C)]\\
&=[(A^c\cap A)\times Y]\cup[A^c\times C]\cup[A\times B]\\
&\quad\cup[(A\cap A^c)\times(B\cap C)]\\
&=(A\times B)\cup(A^c\times C),
\end{aligned}
$$

所以$((a)\to(b),\ \neg(a)\to(c))$的真域也可以写成

$$R=(A\times B)\cup(A^c\times C).$$

R的两种写法直接给出Fuzzy条件句$((a)\to(b),\ \neg(a)\to(c))$的两种真域模型．

模型1

$$R^{(1)}=[(A^c\times Y)\cup(A\times B)]\cap[(A\times Y)\cup(A^c\times C)];$$

$$R^{(1)}(x,y)=[(1-A(x))\vee(A(x)\wedge B(y))]$$

$$\wedge[A(x)\vee((1-A(x))\wedge C(y))].$$

模型2

$$R^{(2)}=(A\times B)\cup(A^c\times C)$$

$$R^{(2)}(x,y)=[A(x)\wedge B(y)]\vee[(1-A(x))\wedge C(y)].$$

这两种真域模型都是普通条件句的真域在形式上的推广。很明显

$$R^{(1)}=[(A^c\times Y)\cup(A\times B)]\cap[A\times Y)\cap(A^c\times C)]$$

$$=\{(A^c\cap A)\times Y]\cup[(A^c\times C]\cup[A\times B]$$

$$\cup[(A\cap A^c)\times(B\cap C)\}$$

$$=[(A\cap A^c)\times Y]\cup[A\times B]\cup[A^c\times C]$$

$$\supseteq R^{(2)}.$$

因此，忽略模型I中的$(A\cap A^c)\times Y$便成为模型2。

除了这两种模型之外，还有一种新的模型来自真域的Fuzzy关系方程的解。

模型3　真域R的Fuzzy关系方程组是

$$\begin{cases}A\circ R=B\\ A^c\circ R=C.\end{cases}$$

设$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$Y=\{y_1,y_2\cdots,y_n\}$，$A=(a_1,a_2,\cdots a_m)$，

$A^c=(1-a_1,1-a_2,1-a_m)$，$B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，$C=(c_1,c_2\cdots,c_n)$。则R可表为一个$m\times n$Fuzzy 矩阵，满足方程组

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \\ 1-a_1 & 1-a_2 & \cdots & 1-a_m \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix}.$$

只要这个方程组有解，我们便可取最大解$\underset{\sim}{R}$作为Fuzzy条件句

$((a)\to(b),\ \rceil(a)\to(c))$的真域模型$\underset{\sim}{R}^{(3)}$。

例1　设$X=Y=\{1,2,3,4,5\}$，定义

[短]$=(1,0.8,0.3,0.1,0)$，

[长]$=(0,0.1,0.3,0.8,1)$。

按上述三种模型求Fuzzy条件句“若x短则y长，否则y不很长”的真域。

$\underset{\sim}{A}=$[短]$=(1,0.8,0.3,0.1,0)$;

$\underset{\sim}{B}=$[长]$=(0,0.1,0.3,0.8,1)$;

[很长]$=H_2($[长]$)=(0,0.01,0.09,0.64,1)$;

$\underset{\sim}{A}^c=(0,0.2,0.7,0.9,1)$;

$\underset{\sim}{C}=$[不很长]$=$[很长]^c

$=(1,0.99,0.91,0.36,0)$.

$$(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{A}^c)\times Y=\begin{pmatrix} 1 & \wedge & 0 \\ 0.8 & \wedge & 0.2 \\ 0.3 & \wedge & 0.7 \\ 0.1 & \wedge & 0.9 \\ 0 & \wedge & 1 \end{pmatrix}\circ(1\ 1\ 1\ 1\ 1)$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

$$
\underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.8 \\ 0.3 \\ 0.1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ (\,0 \quad 0.1 \quad 0.3 \quad 0.8 \quad 1\,)
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0.3 & 0.8 & 1 \\ 0 & 0.1 & 0.3 & 0.8 & 0.8 \\ 0 & 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\underset{\sim}{A}^c \times \underset{\sim}{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0.7 \\ 0.9 \\ 1 \end{pmatrix} \circ (\,1 \quad 0.99 \quad 0.91 \quad 0.36 \quad 0\,)
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.36 & 0 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.36 & 0 \\ 1 & 0.99 & 0.91 & 0.36 & 0 \end{pmatrix}.
$$

模型$\underset{\sim}{R}^{(1)}=((\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{A}^c)\times\underset{\sim}{Y})\cup(\underset{\sim}{A}\times\underset{\sim}{B})\cup(\underset{\sim}{A}^c\times\underset{\sim}{C})$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0.3 & 0.8 & 1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.8 & 0.8 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.36 & 0.3 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.36 & 0.1 \\ 1 & 0.99 & 0.91 & 0.36 & 0 \end{pmatrix},$$

模型$\underset{\sim}{R}^{(2)}=(\underset{\sim}{A}\times\underset{\sim}{B})\cup(\underset{\sim}{A}^c\times\underset{\sim}{C})$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0.3 & 0.8 & 1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.8 & 0.8 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.36 & 0.3 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.36 & 0.1 \\ 1 & 0.99 & 0.91 & 0.36 & 1 \end{pmatrix}=\underset{\sim}{R}^{(1)}.$$

在本例中，$\underset{\sim}{R}^{(2)}=\underset{\sim}{R}^{(1)}$，说明$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{A}^c$不起作用.

模型$\underset{\sim}{R}^{(3)}$满足 Fuzzy 关系方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.3 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.7 & 0.9 & 1 \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{15} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{25} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{51} & r_{52} & \cdots & r_{55} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0.3 & 0.8 & 1 \\ 1 & 0.99 & 0.91 & 0.36 & 0 \end{pmatrix}.$$

取其最大解，得

$$R^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0.3 & 0.8 & 1 \\ 0 & 0.1 & 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 1 & 0.36 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0.36 & 0 \\ 0 & 0.99 & 0.91 & 0.36 & 0 \end{pmatrix}.$$

在上节，我们清楚地看到，Fuzzy 推理句的真域曾为似然推理提供有效的数学工具。根据同样的考虑，Fuzzy 条件句的真域也不乏这种功能。下面应用本例的模型$R^{(1)}=R^{(2)}$与$R^{(3)}$，去处理似然推理的几个具体问题。

(1) 已知x略短，问y如何？

$A'=[略短]=H_{\frac{1}{2}}([短])=(1,0.9,0.55,0.3,0)$.

$A'\circ R^{(1)}=(0.55,\ 0.55\ \ 0.55\ ,\ 0.8\ ,\ 1)\approx[长]$

$A'\circ R^{(3)}=(\ 0\ ,\ 0.3\ ,\ 0.55\ ,\ 0.9\ ,\ 1\ )=[略长]$.

其中

$[长]=(\ 0\ ,\ 0.1\ ,\ 0.3\ ,\ 0.8\ ,\ 1\ )$,

$[略长]=H_{\frac{1}{2}}([长])=(0\ ,\ 0.3\ ,\ 0.55\ ,\ 0.9\ ,\ 1)$.

模型$R^{(1)}$判断"y近似长"，大体符合人们的想法，但未加语气；模型$R^{(3)}$判断"y略长"，与人们的思想实际完全符合。

(2) 已知x长，问y如何？

$A'=[长]=(\ 0\ ,\ 0.1\ ,\ 0.3\ ,\ 0.8,\ 1\ )$.

$A'\circ R^{(1)}=(\ 1,\ 0.99,\ 0.91,\ 0.36,\ 0.3)\approx[不很长]$,

$A' \circ R^{(3)} = (1, 0.99, 0.91, 0.36, 0) =$[不很长]．

由于短与长对立，而且给定了Fuzzy条件句“若x短则y长，否则y不很长”，因此已知x长时，平常的想法应不离开“否则y不很长”的范围。由此可知，$R^{(1)}$判断“y近似不很长”，$R^{(3)}$判断“y不很长”，都与人们思想实际符合。

(3) 已知y不长，问x如何？

$B' =$[不长]$=$[长]$^c = (1, 0.9, 0.7, 0.2, 0)$.

$B' \circ R^{(1)T} = (0.3, 0.3, 0.7, 0.9, 1) \approx$[不短]，

$B' \circ R^{(3)T} = (0.3, 0.3, 0.7, 0.9, 1) \approx$[不短]．

其中

[不短]$=$[短]$^c = (0, 0.2, 0.7, 0.9, 1)$.

模型$R^{(1)}$，$R^{(3)}$都判断“y近似不短”，符合人们思想实际。

(4) 已知y短，问x如何？

$B' =$[短]$= (1, 0.8, 0.3, 0.1, 0)$,

$B' \circ R^{(1)T} = (0.3, 0.3, 0.7, 0.9, 1) \approx$[不短]，

$B' \circ R^{(3)T} = (0.3, 0.3, 0.3, 0.8, 1) \approx$[长]．

请留意，不长与短有区别，不短与长也有区别．但模型$R^{(1)}$对“y不长”与“y短”都判断“x近似不短”，未能区别对待。相比之下，模型$R^{(3)}$对“y不长”则判断“x近似不短”，对“y短”则判断“x近似长”．这说明$R^{(3)}$的识别能力较强。

Fuzzy条件句$((2) \to (b), \rceil(a) \to (c))$的真域模型$R^{(1)}$

$\underset{\sim}{R}^{(2)}$颇为常用，但都不太理想。以$\underset{\sim}{R}^{(2)}$而论，进行似然推理时，按理它应满足等式 $\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}^{(2)}=\underset{\sim}{B}$。但其实不然。对于较小的隶属度$\underset{\sim}{B}(y)$，只要 $\underset{\sim}{B}(y)<\underset{\sim}{C}(y)\leqslant\bigvee_{x\in X}[\underset{\sim}{A}(x)\wedge\underset{\sim}{A}^c(x)]$，我们便有

$$
\begin{aligned}
(\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}^{(2)})(y) &= \bigvee_{x\in X}[\underset{\sim}{A}(x)\wedge\underset{\sim}{R}^{(2)}(x,y)] \\
&= \bigvee_{x\in X}[\underset{\sim}{A}(x)\wedge((\underset{\sim}{A}(x)\wedge\underset{\sim}{B}(y)) \\
&\quad \vee(\underset{\sim}{A}^c(x)\wedge\underset{\sim}{C}(y)))] \\
&\geqslant \bigvee_{x\in X}[\underset{\sim}{A}(x)\wedge\underset{\sim}{A}^c(x)\wedge\underset{\sim}{C}(y)] \\
&= [\bigvee_{x\in X}(\underset{\sim}{A}(x)\wedge\underset{\sim}{A}^c(x))]\wedge\underset{\sim}{C}(y) \\
&= \underset{\sim}{C}(y)>\underset{\sim}{B}(y).
\end{aligned}
$$

由此可见，如果使用模型$\underset{\sim}{R}^{(2)}$进行似然推理，则较低的隶属度$\underset{\sim}{B}(y)$会带来相当大的误差。这是我们不希望发生的。此外，由于$\underset{\sim}{R}^{(1)}\supseteq\underset{\sim}{R}^{(2)}$，所以对于较低的隶属度，同样有

$$(\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}^{(1)})(y)\geqslant(\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}^{(2)})(y)>\underset{\sim}{B}(y).$$

这也不是我们希望的，幸好对似然推理结果影响较大的是隶属度较大的值，所以模型$\underset{\sim}{R}^{(1)}$，$\underset{\sim}{R}^{(2)}$仍可勉强使用。

二、多段Fuzzy条件句

句型为“若x是a_1，则y是b_1，否则(若x是a_2，则y是b_2，否则y是b_3)”的语句称为三段Fuzzy条件句。记$(a_3)=(\neg a_1\wedge\neg a_2)$，则三段条件可以写成“若$x$是$a_1$，则$y$是$b_1$；若$x$是$a_2$，则$y$

是b_2；若x是a_3，则y是b_3"，记作$((a_1)\to(b_1)$，$(a_2)\to(b_2)$，$(a_3)\to(b_3))$。

一般地，l段 Fuzzy 条件句是指语句"若x是a_1，则y是b_1；若x是a_2，则y是b_2；…；若x是a_l，则y是b_l"，其中$a_l=(\rceil a_1\wedge\rceil a_2\wedge\cdots\wedge\rceil a_{l-1})$。这个$l$段 Fuzzy 条件句记作$((a_1)\to(b_1)$，$(a_2)\to(b_2)$，$\cdots(a_l)\to(b_l))$。很明显，这理所说二段 Fuzzy 条件句$((a_1)\to(b_1)$，$(a_2)\to(b_2))$便是前面讨论过的 Fuzzy条件句$((a_1)\to(b_1)$，$\rceil(a_1)\to(b_2))$。

对于给定的l段 Fuzzy条件句$((a_1)\to(b_1),(a_2)\to(b_2),\cdots,(a_L)\to(b_L))$，仍用$\underset{\sim}{A}^{(k)}\in\mathscr{F}(X)$，$\underset{\sim}{B}^{(k)}\in\mathscr{F}(Y)$表示$(a_k)$，$(b_k)$的真域。把二段 Fuzzy 条件句的真域形式地推广到l段，便得出l段 Fuzzy 条件句的三种真域模型如下。

模型1。

$$\underset{\sim}{R}^{(1)}=\bigcap_{k=1}^{l}(\underset{\sim}{A}^{(k)c}\times Y)\cup(\underset{\sim}{A}^{(k)}\times\underset{\sim}{B}^{(k)})\in\mathscr{F}(X\times Y),$$

$$\underset{\sim}{R}^{(1)}(x,y)=\bigwedge_{k=1}^{l}(1-\underset{\sim}{A}^{(k)}(x))\vee(\underset{\sim}{A}^{(k)}(x)\wedge\underset{\sim}{B}^{(k)}(y)))$$

模型2。

$$\underset{\sim}{R}^{(2)}=\bigcup_{k=1}^{l}(\underset{\sim}{A}^{(k)}(x)\wedge\underset{\sim}{B}^{(k)}(y)),$$

$$\underset{\sim}{R}^{(2)}(x,y)\bigvee_{k=1}^{l}(\underset{\sim}{A}^{(k)}(x)\wedge\underset{\sim}{B}^{(k)}(y)).$$

模型3。根据真域Fuzzy 关系方程的解求得。

设$\underset{\sim}{A}^{(k)}=(a_{k1},a_{k2},\cdots,a_{kn})\in\mathscr{F}(X)$，$\underset{\sim}{B}^{(k)}=(b_{k1},b_{k2},\cdots,b_{km})\in\mathscr{F}(Y)$、$k=1,2,\cdots,l$，则多段Fuzzy条件句真域$\underset{\sim}{R}^{(3)}$满足

Fuzzy关系方程组

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{lm} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{pmatrix}$$

可简单记为

$$\begin{pmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ \cdots \\ A^{(l)} \end{pmatrix} \circ R = \begin{pmatrix} B^{(1)} \\ B^{(2)} \\ \vdots \\ B^{(l)} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

我们取方程组(1)的最大解作为真域 $R^{(3)}$. 如果方程组无解，说明多段Fuzzy条件句不协调，应适当加以调整，引起不协调的原因可能是各条推理句$(a_k)\to(b_k)$之间在涵义上互相矛盾，这时必须从根本上修改或删除不合理的推理句，也可能各条推理句本身是合理的，但是由于$A^{(k)}$，$B^{(k)}$的隶属函数建立得不好(这些隶属函数一般是凭经验确定的近似函数)，引起方程组无解，此时应酌情修改隶属函数。

§6.8 Fuzzy 控制的基本原理

随着社会生产力的发展，自动控制越来越重要。研究自动控制的目的是在生产过程中利用机器或其它设备来代替人工操作. 古典控制理论对于解决线性定常系统的控制问题十分有效. 所谓线性，是指系统的输入量、输出量以及它们的各阶微分之间的关系是线性的，也就是说，可以用线性微分

方程描述该系统的输入量与输出量之间的关系。所谓定常，是指输入量与输出量之间是恒定的，不因时间的推移而改变。现代控制理论则致力非线性时变系统的控制问题。无论古典控制理论还是现代控制理论，要应用于实际设计都要有一个前提，即必须事先知道被控制对象在整个过中的精确数学模型。但许多现实系统极其复杂，涉及众多因素，要确定被控制对象的精确数学模型是非常困难的，有时甚至是不可能的。这是一方面。而另一方面，不管什么样的非线性时变系统，一个熟练的专业工人却凭着丰富的实践经验得心应手地驾驶着一个复杂的生产过程。这样的情况使人们想到，能否避开精确数学模型的建立而直接把专业工人的丰富经验总结成若干条控制规则并设计一个控制器实现这些规则呢？这正是Fuzzy控制理论所要探讨的问题。

一、水位的Fuzzy控制

在图1中有一个贮水的容器。容器的水位l可变，水位从固定点O算起。调节阀门v可以向容器内注水也可以向容器外排水，要求设计一个控制器，通过调节阀门v使水位尽量接近点O。

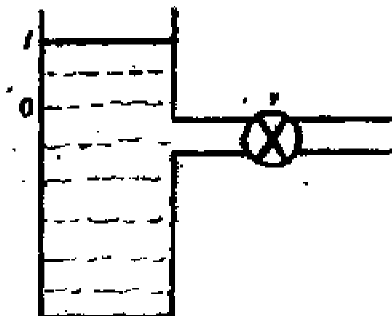


图1

假定对水位变化的原因并不了解，仅凭经验提供几条粗略的控制规则。

(1) 若水位很高(记作PB_l)，则阀门大量排水(记作NB_v)；

(2) 若水位稍高(记作PS_l)，则阀门稍许排水(记作

NS_v)；

(3) 若水位处于预定的高度(记作$l=0$)，则阀门保持不动(记作$v=0$)；

(4) 若水位稍低(记作NS_l)，则阀门稍许注水(记作PS_v)；

(5) 若水位很低(记作NB_l)，则阀门大量注水(记作PB_v)。

这几条模糊控制规则显然相当于一个多段Fuzzy条件句。

模糊控制器的框图如图2所示。大意是用技术手段对被控制对象逐次进行观察得到观察量$\underset{\sim}{A}$(是某一论域上的Fuzzy集)；按控制规则$\underset{\sim}{R}$计算控制量$\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}$；根据控制量作出确切的响应动作，施加于被控制对象。如此循环往复，使被控制对象稳定在预期的范围之内。

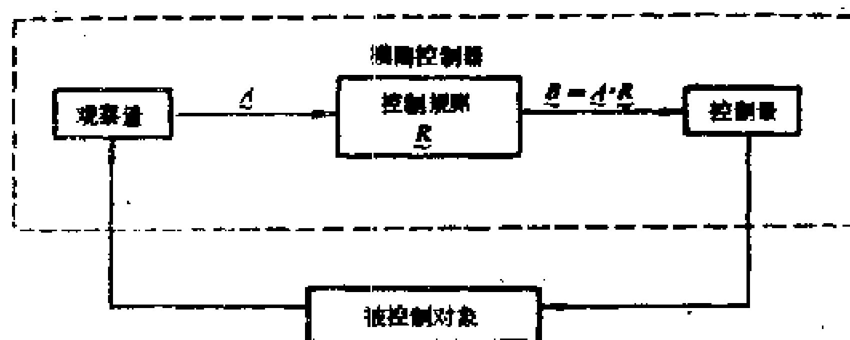


图2

现在根据上述考虑，着手设计水位的模糊控制器。

(1) 观察量。设从固定点O算起，$l\in U$分成七个等级，

$U=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

水位的模糊观察量为U上的五个Fuzzy集PB_l(正大)，PS_l

(正小)，O_l(零)，NS_l(负小)，NB_l(负大)．为省事计，Fuzzy 集下边的波纹号～全部略去．它们的隶属度见表1．

表 1

	-3	-2	-1	0	1	2	3
PB_l	0	0	0	0	0	0.5	1
PS_l	0	0	0	0	1	0.5	0
O_l	0	0	0.5	1	0.5	0	0
NS_l	0	0.5	1	0	0	0	0
NB_l	1	0.5	0	0	0	0	0

(2) 控制量．设阀门角度$v\in V$分成九个等级，

$$V=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$$

阀门的模糊控制量为V上的五个 Fuzzy 集 PB_v(正大)，PS_v(正小)，O_v(零)，NS_v(负小)，NB_v(负大)．它们的隶属度见表2

表 2

	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
PB_v	0	0	0	0	0	0	0.2	0.5	1
PS_v	0	0	0	0	0	1	0.5	0.2	0
O_v	0	0	0.2	0.5	1	0.5	0.2	0	0
NS_v	0	0.2	0.5	1	0	0	0	0	0
NB_v	1	0.5	0.2	0	0	0	0	0	0

(3) 语言控制规则

$$\frac{\text{若}\ PB_l\ PS_l\ O_l\ NS_l\ NB_l}{\text{则}\ NB_v\ NS_v\ O_v\ PS_v\ PB_v}$$

此为多段 Fuzzy 条件句，其真域 $\underset{\sim}{R} \in \mathscr{F}(U \times V)$表示 7×9 Fuzzy 矩阵.令

$$\underset{\sim}{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\underset{\sim}{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

那么$\underset{\sim}{R}$应是Fuzzy 关系 方 程 $\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{B}$的最大解.运用§4.1的算法计算$\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{A}^T \overset{\circ}{\alpha} \underset{\sim}{B}$,

$$
\underset{\sim}{R}=\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.
$$

但是，

$$
\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}=\begin{pmatrix}
1 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.2 & \underline{0.2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \underline{0.2} & 0.2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\subset \underset{\sim}{B} \tag{1}
$$

根据§4.1定理1推知方程没有解.控制规则看来是合理的，因此需要对模糊观察量或模糊控制量适当修正.从式(1)不难发现，只要修改NS_v与PS_v，令

$NS'_v=(0,0.2,0.2,1,0,0,0,0,0)$,

$PS'_v=(0,0,0,0,0,1,0.2,0.2,0)$,

则$\underset{\sim}{R}$ 正是修改后的方程的最大解。

(4) 响应动作。

任给一观察量 $\underset{\sim}{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_7)\in\mathscr{F}(U)$ 可得模糊响应 $\underset{\sim}{a}\circ\underset{\sim}{R}\in\mathscr{F}(V)$.例如

$$\underset{\sim}{a}^{(1)}=NB_1=(1,0.5,0,0,0,0,0),$$

$$\underset{\sim}{a}^{(1)}\circ\underset{\sim}{R}=(0,0,0,0,0,0,0.2,0.5,1)$$

$$=\frac{0.2}{2}+\frac{0.5}{3}+\frac{1}{4}.$$

按隶属原则，取控制量为 +4级即 $v=+4$，叫做对应于观察量 $\underset{\sim}{a}^{(1)}$的确切响应。

观察量也可以是非模糊的，如

$$\underset{\sim}{a}^{(2)}=(0,0,0,0,0,1,0)$$

表示水位对零点的偏差处于+2级，由它引起的模糊响应

$$\underset{\sim}{a}^{(2)}\circ\underset{\sim}{R}=(0,0.2,0.2,0,0,0,0,0,0)$$

$$=\frac{0.2}{-3}+\frac{0.2}{-2},$$

此时峰值(指隶属度最大值)为0.2，峰域(指具有最大隶属度的那些元素的集合)为{-3,-2}.可取峰域中心 -2.5作为确切响应。

又如观察量

$$\underset{\sim}{a}^{(3)}=(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.5,\ 1,\ 0.5)$$

表示水位差处于正大与正小之间，则

$$\underset{\sim}{a}^{(3)}\circ\underset{\sim}{R}=(0.5,0.5,0.2,0.5,0,0,0,0,0)$$

$$=\frac{0.5}{-4}+\frac{0.5}{-3}+\frac{0.2}{-2}+\frac{0.5}{-1}.$$

此时峰值为 0.5；峰域为{-4,-3,-1}，它包含多个元素但不相邻，因而没有峰域中心.在这种情况下，无法得到确切响应；称模糊控制器关于观察量 $\underset{\sim}{a}^{(3)}$不可响应。

设计模糊控制器应顾及可响应问题，同时要求峰值不低于某水平λ.从这两点要求看，上述控制器并不理想．因而可适当调整Fuzzy矩阵 $\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$ 以改善 $\underset{\sim}{R}$，也可以先适当调整 $\underset{\sim}{R}$，再以 $\underset{\sim}{R}$为准调整 $\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$．对本例而言，由于 $\underset{\sim}{R}$的第 3 列与第7列的非零元都是0.2，造成峰值太低或峰域内的元素不相邻的缺点，所以我们将 $\underset{\sim}{R}$适当调整为 $\underset{\sim}{R}'$，

$$\underset{\sim}{R}'=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{0.5} & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \underline{0.5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{0.5} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & \underline{0.5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

画横线的0.5是从0.2调整来的．于是

$$B' = A \circ R' = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

将B'与B相比较，只要修改NB_v，O_v，PB_v为

$$NB''_v = (1, 0.5, 0.5, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$O''_v = (0, 0, 0.5, 0.5, 1, 0.5, 0.5, 0, 0),$$

$$PB''_v = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.5, 0.5, 1),$$

并保持原来的NS_v，PS_v不变，那么R'就成为新方程$A \circ X = B'$的解。R'对$a^{(1)}$，$a^{(2)}$，$a^{(3)}$的响应分别为

$$a^{(1)} \circ R' = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.5, 0.5, 1)$$

$$= \frac{0.5}{2} + \frac{0.5}{3} + \frac{1}{4},$$

确切响应为+4级，峰值仍为1；

$$a^{(2)} \circ R' = (0, 0.2, 0.5, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$= \frac{0.2}{-3} + \frac{0.5}{-2},$$

确切响应为-2级，峰值提高到0.5；

$$a^{(3)} \circ R' = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$= \frac{0.5}{-4} + \frac{0.5}{-3} + \frac{0.5}{-2} + \frac{0.5}{-1},$$

确切响应为－2.5级.

由此可见，R'对$\underset{\sim}{a}^{(1)}$，$\underset{\sim}{a}^{(2)}$，$\underset{\sim}{a}^{(3)}$都可响应，对$\underset{\sim}{a}^{(2)}$的响应还提高了峰值. 这种调整是有益的，收到了预期的效果.

(5) 响应表

对非模糊的观察量

$\{-3\}=(1,0,0,0,0,0,0)$,

$\{-2\}=(0,1,0,0,0,0,0)$,

……

$\{2\}=(0,0,0,0,0,0,1)$,

对应的模糊响应恰好是R'各行向量.例如R'对$\{-3\}$的模糊响应

$$\{-3\}\circ R'=(0,0,0,0,0,0,0.2,0.5,1)$$

对各行向量寻找峰域中心便获得确切响应. 因此

$$R'=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\xrightarrow{\text{确切响应}} \begin{pmatrix} +4 \\ +2 \\ +1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

列成表格

观察量	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3
控制量	+4	+2	+1	0	−1	−2	−4

称为模糊控制器的响应表。模糊控制器的功能，主要体现在响应表上。

二、峰值的再提高

刚才已说过，R'是新方程$A'\circ X = B'$的一个解．新方程的最大解R^*为

$$R^* = A^T \overset{\circ}{\alpha} B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\underset{\sim}{R}^*$ 对 $\underset{\sim}{a}^{(1)}$，$\underset{\sim}{a}^{(2)}$，$\underset{\sim}{a}^{(3)}$的响应分别为：

$$\underset{\sim}{a}^{(1)} \circ \underset{\sim}{R}^* = (0,0,0,0,0,0,0.5,0.5,1)$$

$$= \frac{0.5}{2} + \frac{0.5}{3} + \frac{1}{4}$$

确切响应为＋4级，峰值仍为1。

$$\underset{\sim}{a}^{(2)} \circ \underset{\sim}{R}^* = (0,0.2,1,0,0,0,0,0,0)$$

$$= \frac{0.2}{-3} + \frac{1}{-2}$$

确切响应为－2级，峰值提高到1.

$$\underset{\sim}{a}^{(3)} \circ \underset{\sim}{R}^* = (0.5,0.5,1,0.5,0,0,0,0,0,)$$

$$= \frac{0.5}{-4} + \frac{0.5}{-3} - \frac{1}{-2} + \frac{0.5}{-1}$$

确切响应为－2级，峰值提高到1.

由此可见，$\underset{\sim}{R}^*$对$\underset{\sim}{a}^{(1)}$，$\underset{\sim}{a}^{(2)}$，$\underset{\sim}{a}^{(3)}$都可响应，而且对$\underset{\sim}{a}^{(2)}$，$\underset{\sim}{a}^{(3)}$的响应都提高了峰值，所以令 $\underset{\sim}{R}^*$代替R′是有益的.

根据 $\underset{\sim}{R}^*$设计的模糊控制器的响应表为

观察量	−3	−2	−1	0	1	2	3
控制量	+4	+2	+1	0	−1	−2	−4

与R′的响应表相同.

三、 模糊控制器的稳定性

下面回过头来采用§6.7中的模型2设计另一个模糊控制器以作比较。令

$$\underset{\sim}{R}^{(2)} = (PB_l \times NB_v) \cup (PS_l \times NS_v) \cup (O_l \times O_v$$

$\cup(NS_l \times PS_v) \cup (NB_l \times PB_v)$.

作出计算

$$PB_l \times NB_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \circ (1, 0.5, 0.2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

同样

$$PS_l \times NS_v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$O_t \times O_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$NS_t \times PS_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$NB_t \times PB_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是得

$$
R^{(2)}=\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\
0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0.2 & 0 \\
0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\
0 & 0.2 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\
0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix};
$$

$$
\xrightarrow{\text{确切响应}}\begin{pmatrix}
+4 \\ +2.5 \\ +1 \\ 0 \\ -1 \\ -2.5 \\ -4
\end{pmatrix}.
$$

列出响应表

观察量	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$
控制量	$+4$	$+2.5$	$+1$	0	-1	-2.5	-4

与R^*的响应表接近。

比较R^*与$R^{(2)}$对下列模糊观察量的响应。令

$$a^{(4)}=(0,1,0,0,0,0,0),$$

$$a^{(6)}(0.5,1,0.5,0,0,0,0);$$

又令

$$a^{(5)}=(0.2,1,0.2,0,0,0,0).$$

相应的响应为

$$a^{(4)} \circ R^* = (0,0,0,0,0,0,1,0.2,0)$$

$$\xrightarrow{\text{确切响应}} v = +2\text{级},$$

$$a^{(5)} \circ R^* = (0,0,0,0,0,0.5,1,0.5,0.5)$$

$$\xrightarrow{\text{确切响应}} v = +2\text{级},$$

$$a^{(6)} \circ R^* = (0,0,0,0,0,0.2,1,0.2,0.2)$$

$$\xrightarrow{\text{确切响应}} v = +2\text{级},$$

$$a^{(4)} \circ R^{(2)} = (0,0,0,0,0,0.5,0.5,0.5,0.5)$$

$$\xrightarrow{\text{确切响应}} v = +2.5\text{级},$$

$$a^{(5)} \circ R^{(2)} = (0,0,0.2,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5)$$

$$\xrightarrow{\text{确切响应}} v = +1.5\text{级},$$

$$a^{(6)} \circ R^{(2)} = (0,0,0.2,0.2,0.2,0.5,0.5,0.5,0.5)$$

$$\xrightarrow{\text{确切响应}} v = +2.5\text{级}.$$

这三个模糊观察量$a^{(4)}$，$a^{(5)}$，$a^{(6)}$比较接近，模型R^*对它们作出相同的响应；但模型$R^{(2)}$对它们的响应则有相当大的差别。相比之下，R^*对模糊观察量响应比较稳定。因为$a^{(4)}$，$a^{(5)}$，$a^{(6)}$可能由于某种干扰而使信息相互转化，这时R^*的响应并不变动，但$R^{(2)}$的响应则因为这种干扰而摇摆。$R^{(2)}$之所以不稳定，是由于模糊响应的峰域太宽，其根源正是我们介

绍模型2 时所指出的，较低的隶属度常常带来相当大的误差，因而计算结果中的许多数值（例如$\underset{\sim}{a}^{(5)}\circ\underset{\sim}{R}^{(2)}$中的0.5）其实都偏大了。当最大隶属度 1 的信息受到干扰而丢失时，在这些扩大化了的 0.5 的作用下，峰域变宽，导致峰域中心摆动不稳。

四、多元糊模控制规则

在实用系统中，决定控制量的观察量往往不止一个。考虑对金属零件进行热处理的电热炉系统，我们要求设计一个模糊控制器使金属零件保持恒定温度。这时观察量是零件的温度T以及温度的变化率$\dot{T}$。控制量是加于电热炉的电压V。T及$\dot{T}$的值共同决定V的值。换言之，模糊控制规则是二元函数

$$\underset{\sim}{V}=f(\underset{\sim}{T},\ \dot{\underset{\sim}{T}}),$$

称为二元模糊控制规则。一般地，它可以转化为一元模糊控制规则。设$\underset{\sim}{T}\in \boldsymbol{M}_{1\times m}$，$\dot{\underset{\sim}{T}}\in \boldsymbol{M}_{1\times n}$，$\underset{\sim}{V}\in \boldsymbol{M}_{1\times p}$；则观察量可表为

$$\underset{\sim}{A}=(\underset{\sim}{T},\ \dot{\underset{\sim}{T}})\in \boldsymbol{M}_{1\times(m+n)},$$

模糊控制规则可表为$\underset{\sim}{R}\in \boldsymbol{M}_{(m+n)\times p}$，而似然推理模型为

$$\underset{\sim}{V}=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}\ .$$

二元模糊控制$\underset{\sim}{V}=f(\underset{\sim}{T},\ \dot{\underset{\sim}{T}})$转化为一元模糊控制$\underset{\sim}{V}=f(\underset{\sim}{A})$。

第七章 模糊逻辑

§ 7.1 前言

模糊逻辑是模糊数学的重要分支。资料表明，扎德的Fuzzy集理论的奠基文章一当在1965年出现，便马上被应用于二值逻辑。1966年，P.N.Marinos发表了关于模糊逻辑的内部研究报告，这是模糊逻辑诞生标志。古典的二值逻辑的真值只取真假(或1，0)两个值，它们在具有二值特点的学科领域中能发挥巨大作用，但在象人工智能、生物工程、社会经济等复杂系统的研究中便显得无能为力。因为这些系统不但结构、功能复杂，涉及大量参数和变量，而且往往具有不精确性的特点，而作为二值逻辑的推广的模糊逻辑却能适应这种研究的需要。

本章依次介绍模糊逻辑公式、公式的极小化、合成和分解、电路应用及其个数的估计。

§ 7·2 模糊逻辑公式

本节将讨论模糊逻辑公式，它可以看为普通逻辑公式的推广。为讨论方便，用“+”代表“∨”(取最大值)，用“·”代表“∧”(取最小值)，必要时“·”可省去。 表示(1－f)，称为f的补。

令$x_1, x_2, \cdots, x_n$为一组取值于区间[0,1]的变量，称它们为模糊变量。本章所说的变量均指模糊变量。

定义1 模糊逻辑公式是指如下映射：

$$f:[0,1]^n \to [0,1]$$

其表达式仅由 x_i，$+$，$\cdot$，$^-$ 及括号所組成．模糊逻辑公式简称为**F－公式**。

F－公式也可递归定义如下：

(1) 数0，1是F－公式；

(2) 模糊变量x_i本身是F－公式；

(3) 若f是F－公式，则$\overline{f}$也是F－公式；

(4) 若f，f'是F－公式，则$f+f'$，$f\cdot f'$也是F－公式；

(5) 所有F－公式均由有限次使用(1)－(4)给出。

例如$f=x_1+\overline{x_2}$，$f'=x_1\cdot x_2$均为F－公式．

F－公式满足除补元律$f+\overline{f}=1$，$\overline{f}\cdot f=0$之外的所有布尔代数的公理，因此若以$\mathscr{F}$表示所有F－公式的集合，则($\mathscr{F}$，$+$，$\cdot$，$^-$)是软代数。

下面我们讨论F－公式的范式，先定义几个术语。

变量x_i及其补$\overline{x_i}$均称为**文字**，文字用l_i表示；称文字的析取式$(l_1+l_2+\cdots+l_p)$为**子句**；称文字的合取式$(l_1\cdot l_2,\cdots\cdot l_p)$为**片语**，并用$c$表子句，用希腊字母$\alpha$，$\beta$，$\gamma$等表片语。

定义2 若F－公式具有形式

$$f=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p \quad (p\geqslant 1),$$

其中α_i是片语，$i=1$，2，$\cdots p$，则称f的这种形式为**析取范式**；若F－公式具有形式

$$f=c_1\cdot c_2\cdot\cdots\cdot c_p \quad (p\geqslant 1),$$

其中c_i是子句，$i=1,2\cdots,p$，则称f的这种形式为**合取范式**。

命题 除0，1外，任一F－公式都可化为析取范式或合

取范式。

证明留着习题。

例1　将 $f=[\overline{\overline{x_1}(x_1+\overline{x_2})}]x_3$ 化为析取范式.

解

$$
\begin{aligned}
f&=[\overline{(\overline{x_1}(x_1+\overline{x_2}))}]x_3\\
&=[\overline{(\overline{x_1})}+\overline{(x_1+\overline{x_2})}]x_3\\
&=[x_1+\overline{x_1}\cdot(\overline{\overline{x_2}})]x_3\\
&=x_1x_3+\overline{x_1}x_2x_3.
\end{aligned}
$$

在二值逻辑中，一个公式的真假值是很重要的。在模糊逻辑中，可类似地定义相应的概念。

对F－公式f，给变量x_i以具体数值（简称变量赋值），便有定值$T(f)$，称为f的真值。

定义3　设F－公式f，若对f中变量的一切赋值，均有$T(f)\geqslant 1/2$，则称F－公式为F－真；若对f的一切赋值，均有$T(f)\leqslant 1/2$，则称F－公式f为F－假。

例2　证明$f=x+\overline{x}$为F－真。

证　设x取值$T(x)$，则

$$
T(f)=\mathrm{Max}\{T(x),\ 1-T(x)\}
=\begin{cases}T(x), & \text{当}T(x)\geqslant 1/2,\\ 1-T(x), & \text{当}T(x)<1/2.\end{cases}
$$

故无论$T(x)$为何值，恒有$T(f)\geqslant\frac{1}{2}$，所以f为F－真。

例3　证明$f=x\cdot\overline{x}$为F－假。

证　设x取值$T(x)$，则

$$T(f)=\mathrm{Min}\{T(x),\ 1-T(x)\}$$

$$= \begin{cases} T(x), & \text{当} T(x) \leqslant 1/2, \\ 1-(x), & \text{当} T(x) > 1/2. \end{cases}$$

故恒有$T(f) \leqslant 1/2$，所以f为F－假。

注意 存在既不是F-真也不是F-假的F-公式，例如$f = x$.

下面我们证明一个重要定理，它反映二值逻辑与模糊逻辑两者之间的联系。

定理1 F－公式f为F－真的充分必要条件是f在二值逻辑中永真。F－公式f为F－假的充分必要条件是f在二值逻辑中永假。

为证定理先证如下两个引理。

引理1 （1） 若子句c含有互补对$(x_i, \bar{x}_i)$，则c为F－真.

（2） 若子句c在二值逻辑中永真，则c含有互补对$(x_i, \bar{x}_i)$。

（3） 若片语α含有互补对$(x_i, \bar{x}_i)$，则α为F-假.

（4） 若片语α在二值逻辑中永假，则α含有互补对$(x_i, \bar{x}_i)$。

证 只证(1)和(2)，(3)和(4)由读者完成。

（1） 若子句c含有互补对$(x_i, \bar{x}_i)$，则因c具有形式

$$c = l_1 + l_2 + \cdots + l_m,$$

所以有

$$T(c) = \underset{1 \leqslant i \leqslant m}{\mathrm{Max}} T(l_i) \geqslant T(x_i + \bar{x}_i) \geqslant 1/2,$$

故子句c是F－真。

（2） 设c永真，如若c不含任何互补对$(x_i, \bar{x}_i)$，那么

可给出一组赋值如下：对显出现在c中的变量均赋值0，其余变量均赋值1。因$c=l_1+l_2+\cdots+l_m$，且l_i为x_j或$\overline{x_j}$，所以此时对一切l_i都有$T(l_i)=0$，从而$T(c)=0$。这与c为永真矛盾，因此c必含互补对$(x_i,\ \overline{x_i})$。 □

引理2 析取范式$f=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p$是$F$－假，当且仅当所有片语$\alpha_i$均是$F$－假。合取范式$f=c_1c_2\cdots c_p$是F－真当且仅当所有子句$c_j$均是$F$－真。

证 由$T(f)=\underset{1\leqslant i\leqslant p}{\mathrm{Max}}\ T(\alpha_i)$，得

$$T(f)\leqslant 1/2 \iff T(\alpha_i)\leqslant 1/2\ (i=1,2,\cdots,p).$$

因而，f是F－假$\iff$每一α_i均是F－假。

类似地，可证得引理的后一结论。 □

定理的证明 设f为F－真，则对f中的一切变量的所有取值，均有$T(f)\geqslant 1/2$，因而当f中的变量仅取0、1两值时，仍有$T(f)\geqslant 1/2$，而此时只可能$T(f)=1$。这表明f在二值逻辑中永真。

反之，设f在二值逻辑中永真。当$f\equiv 1$时，显然f为F－真。下设$f\neq 1$。因任一不为0或1的F－公式均可化为合取范式，所以只须考虑f为合取范式即可。

(i) 当f是子句$f=l_1+l_2+\cdots+l_p(p\geqslant 1)$时，由引理1的(2)知$f$含有互补对$(x_i,\overline{x_i})$，再由该引理的(1)知$f$必$F$－真。

(ii) 当f是合取范式$f=c_1c_2\cdots c_p$时，

f永真$\Longrightarrow$每一c_i永真（由(i)）$\Longrightarrow$每一c_i为F－真（由引理2）$\Rightarrow f$为F－真。

定理的后半部分可由对偶性得出。 □

在例2、例3中已知 $f_1 = x + \bar{x}$ 为F－真，$f_2 = x\bar{x}$ 为 F－假，而在二值逻辑中$f_1 = 1$，$f_2 = 0$。

回顾定义1，每个F－公式均指映射，并非仅仅的指它的一个具体表达式，事实上，每个F－公式可以有多种表达式，即使范式也是如此。这种情况对F－公式的实际应用是不方便的，因而有必要进一步讨论F－公式的唯一表达形式问题。今后我们把同一个F－公式的所有表达式都叫做这个F－公式的等价形式。

定义4 不含互补对的片语，称为单片语；含有互补对的片语称为偶片语；每个变量或其补至少出现一次的偶片语称为满标偶片语；单片语和满标偶片语统称为**基本片语**。

因$T(x_i\bar{x}_i) \leqslant 1/2$，$T(x_i + \bar{x}_i) \geqslant 1/2$，所以

$$x_i\bar{x}_i = x_i\bar{x}_i(x_j + \bar{x}_j) = x_i\bar{x}_ix_j + x_i\bar{x}_i\bar{x}_j. \tag{1}$$

反复利用(1)式可知任一偶片语都可化为满标偶片语的析取。

以下我们指的基本片语均不含重复文字。

定义5 由基本片语组成，且任一片语所含文字不全出现在另一片语中的析取范式称为**主析取范式**.

定理2 任一不为0或1的F－公式都可化为主析取范式，且表达式唯一。

证 任取一个不为0或1的F－公式f，将f化为析取范式。若f中存在不是基本片语的偶片语，将之化为满标偶片语的析取，再利用吸收律$(x + xy = x)$把多余的片语统统去掉，最终得到的式子便是主析取范式。

下证唯一性。

任取主析取范式f_1、f_2，设f_1与f_2有不同的形式。在f_1及

f_2的所有片语中，显然必可选一个文字数最少且仅出现于一个f_i的片语α，不妨设α出现于f_1。此时f_2中任意一个片语所含的文字至少有一个不在α中。如若不然，设f_2中片语β的文字全在α中。因为α不出现于f_2，所以β的文字个数必少于α。由α的选法，β也应出现在f_1中，于是在f_1中导致β的文字全部出现于α的情况，这与f_1是主析取范式矛盾。下分两种情况。

（1） α是单片语。选择赋值$a\in\{0,1/2,1\}^n$如下：对α中未出现的变量赋值1/2，对α中出现的变量赋值0或1，使$T(\alpha(a))=1$。于是$T(f_1(a))=1$。任取f_2的一个片语β，前面已证β至少有一文字不在α中，所以$T(\beta(a))\leqslant 1/2$，从而$T(f_2(a))\leqslant 1/2$。故$f_1\neq f_2$。

（2） α是满标偶片语。选择赋值$b\in\{0,1/2,1\}^n$如下：给α中构成互补对的变量赋值1/2，其余变量赋值0或1，使$T(\alpha(b))=1/2$。于是$T(f_1(b))\geqslant 1/2$。因α或者含有每个变量或者含有这个变量的补，所以在f_2的任一片语β中不出现于α的文字必和α的某一文字构成互补对，于是$T(\beta(b))=0$，从而$T(f_2(b))=0$。故$f_1\neq f_2$。

以上已证得形式不同的主析取范式必代表不同的F－公式，从而唯一性得证。 □

例4 设$n=3$，求下面F－公式的主析取范式，

$$f=x_3\{[\overline{\bar{x}_2(x_2+\bar{x}_1)}]+\bar{x}_3x_2x_1\bar{\bar{x}}_1\}+\bar{x}_3\bar{x}_3(x_2x_1\bar{x}_1+\bar{x}_2).$$

解 (i) 将f写为析取范式：

$$f=x_2x_3+x_1\bar{x}_2x_3+x_1\bar{\bar{x}}_1x_2x_3\bar{\bar{x}}_3+\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2\bar{x}_3+x_2x_3\bar{\bar{x}}_3.$$

(ii) 将每个非基本片语化为基本片语的析取：

$$\bar{x}_2x_3\bar{x}_3=\bar{x}_2x_3\bar{x}_3(x_1+\bar{x}_1)=x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_3+\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_3.$$

于是

$$f=x_2x_3+x_1\bar{x}_2x_3+x_1\bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_3+x_1\bar{x}_1x_2\bar{x}_2\bar{x}_3+x_1\bar{x}_2$$

$$x_3\bar{x}_3+\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_3.$$

(iii) 因为 $x_2x_3+x_1\bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_3=x_2x_3$ ，

$$x_1\bar{x}_2x_3+x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_3=x_1\bar{x}_2x_3 ,$$

所以f的主析取范式为

$$f=x_2x_3+x_1\bar{x}_2x_3+x_1\bar{x}_1x_2\bar{x}_2\bar{x}_3+\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_3.$$

从定理2的证明中可以看到：两个主析取范式f_1和f_2若形式不同，则存在$a\in\{0,1/2,1\}^n$，使$T(f_1(a))\neq T(f_2(a))$.换言之，若对$\forall a\in\{0,1/2,1\}^n$，都有$T(f_1(a))=T(f_2(a))$，则 f_1 与 f_2 形式相同，即$f_1=f_2$. 于是我们得到

定理3 设f_1，f_2为F－公式，若对$\forall a\in\{0,1/2,1\}^n$，均有$T(f_1(a))=T(f_2(a))$，则$f_1=f_2$.

定理3表明由有限多个赋值便能断定两个F-公式是否相等.

§ 7.3 模糊逻辑函数的极小化

我们把由F－公式表达的函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为模糊逻辑函数，简记为F－函数，且把$[0,1]^n$的元素称为元．这儿的公式与函数本质上是相同的.为讨论方便，当元$a\in[0,1]^n$给定时，令$f(a)$的真值$T(f(a))$取$f(a)$本身，即

$$T(f(a))=f(a)=f(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

在二值逻辑中，布尔函数的极小化问题是一个很受重视的问题，它在开关理论、信息处理、人工智能等方面都有重要应用。同样，$F-$函数的极小化问题也具有实际意义。例如在电路中，它能减少元件数目（在析取范式中，片语相当于一个与门，文字相应于一根输入线）。下面讨论$F-$函数的极小化，先讨论一些相关问题。

定义1 设f_1，f_2为$F-$函数，若对$\forall a\in[0,1]^n$，都有$f_1(a)\geqslant f_2(a)$，则称f_1包含f_2或f_2被f_1所包含，记为$f_1\geqslant f_2$。

$f_1\geqslant f_2$也记为$f_2\leqslant f_1$。当$f_1\geqslant f_2$时，显然有$f_1+f_2=f_1$。例如$x_1+x_1x_2=x_1$。

在二值逻辑中，所谓f蕴涵f'是指对任意的赋值有：

$T(f)=1\Rightarrow T(f')=1$　（等价于$f\leqslant f'$），简记为$f\to f'$．此时f是f'的蕴涵项．

定义2 设f，f'是$F-$函数，若$f\leqslant f'$，则称f模糊涵蕴f'，记为$f\overset{F}{\to}f'$，称f是f'的模糊蕴涵项，简称为$F-$蕴涵项。

例1　易知下列各式成立：

$$x\overset{F}{\to}x+y;$$

$$xy\overset{F}{\to}y\ ;$$

$$x\bar{x}\overset{F}{\to}y+\bar{y}\ .$$

定义3 设f是$F-$函数，片语α是$F-$蕴涵项．若当$\alpha\overset{F}{\to}\alpha'$，$\alpha'\overset{F}{\to}f$时，必有$\alpha'=\alpha$或$\alpha'=f$，则称$\alpha$是$f$的$F-$素蕴涵项（用FPI表示）。

由定义知，f的FPI是f的由片语组成的$F-$蕴涵项集合的极大元(相当于“$\xrightarrow{F}$”所导出的序)。在形式上，若片语α是f的FPI，则在α中去掉任何一个文字后都不再成为f的$F-$蕴涵项。

若$\alpha\xrightarrow{F}f$且α为$F-$真，则在二值逻辑中必有$\alpha\rightarrow f$，但其逆则未必成立，

例2　设$f=xy+\bar{x}y$，$\alpha=y$。证明$\alpha\rightarrow f$但$\alpha\xrightarrow{F}f$不成立。

证　在二值逻辑中。因$x+\bar{x}=1$，所以

$$f=xy+\bar{x}y=(x+\bar{x})y=y=\alpha,$$

故

$$\alpha\rightarrow f\ .$$

在模糊逻辑中，因

$$f(1/2,1)=1/2,\quad \alpha(1/2,1)=1,$$

所以$\alpha\leqslant f$不成立，故α不是f的$F-$蕴涵项。

定义4　一个析取范式称为最简形式，假若成立：

(1)　没有包含较少片语数的其它等价形式；

(2)　没有包含相同片语数而文字总数较少的其它等价形式。

定理1　一个最简形式的析取范式f必然由f的FPI的和所组成。

证　若最简形式的析取范式f含有不是f的FPI的片语α，那么存在不等于α的f的FPIα'，有$\alpha\leqslant\alpha'\leqslant f$。$\alpha'$比$\alpha$有较少的文字，用$\alpha'$代替$\alpha$所得的与$f$等价的析取范式将比$f$有较少的文字，这与$f$是最简式矛盾。　□

定理1指出，寻找f的最简形式的途径是先求f的FPI。为了进一步说明这个问题，引入模糊交感的概念。

定义5 设α,β是$F-$函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的两个片语，如果存在着文字l使$\alpha=l\alpha_0$，$\beta=\overline{l}\beta_0$，而且$\overline{l}$不在$\alpha_0$中，$l$不在$\beta_0$中，那么令集合

$$FC_l(\alpha,\beta)=\{\alpha_0\beta_0x_j\overline{x_j}\mid\alpha_0\beta_0是单片语，x_j\neq l，x_j\neq l\}\cup\{\alpha_0\beta_0\mid\alpha_0\beta_0是偶片语\},$$

否则令集合

$$FC_l(\alpha,\beta)=\phi.$$

我们把并集

$$FC(\alpha,\beta)=\bigcup_l FC_l(\alpha,\beta)$$

称为片语α，β的模糊交感集，$FC(\alpha,\beta)$的每个元素称为片语α，β的一个模糊交感。

显然求模糊交感不一定先给出函数。在模糊交感中，重复出现的文字是不起作用的，可以删去。

例3 设α，β都是$[0,1]^3$上的片语，求下列α，β的模糊交感集：

(1) $\alpha=x_1\overline{x_1}$，$\beta=x_1x_2$；

(2) $\alpha=x_1x_2$，$\beta=x_1\overline{x_1}$；

(3) $\alpha=x_1$，$\beta=\overline{x_1}$.

解 (1) $FC(\alpha,\beta)=\phi$.

(2) $FC(\alpha,\beta)=\{x_1\overline{x_1},\ x_1x_3\overline{x_3}\}$.

(3) $FC(\alpha,\beta)=\{x_2\overline{x_2},x_3\overline{x_3}\}$.

命题 设α，β均为片语，若$FC(\alpha,\beta)$不空，则对任意的$\gamma\in FC(\alpha,\beta)$，都有

$$\alpha+\beta+\gamma=\alpha+\beta.$$

证 设$\gamma\in FC(\alpha,\beta)$，那么由$FC(\alpha,\beta)$的定义，有$\gamma\in FC_1(\alpha,\beta)$。再由$FC_1(\alpha,\beta)$的定义，可分两种情况

(i) $\gamma\in\{\alpha_0\beta_0 x_j\overline{x_j}\mid\alpha_0\beta_0$ 是单片语，$x_j\neq l$，$x_j\neq\overline{l}\}$。这时

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma&=\alpha+\beta+\alpha_0\beta_0 x_j\overline{x_j}\\&=\alpha+\beta+\alpha_0\beta_0 x_j\overline{x_j}(l+\overline{l})\\&=\alpha+\beta+(l\alpha_0)\beta_0 x_j\overline{x_j}+(\overline{l}\beta_0)\alpha_0 x_j\overline{x_j}\\&=\alpha+\beta+\alpha\beta_0 x_j\overline{x_j}+\beta\alpha_0 x_j\overline{x_j}\\&=\alpha+\beta\ .\end{aligned}$$

(ii) $\gamma\in\{\alpha_0\beta_0\mid\alpha_0\beta_0$是偶片语$\}$。这时

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma&=\alpha+\beta+\alpha_0\beta_0\\&=\alpha+\beta+\alpha_0\beta_0(l+\overline{l})\\&=\alpha+\beta+\alpha\beta_0+\beta\alpha_0\\&=\alpha+\beta.\end{aligned}$$

综合(i)(ii)知结论成立。 □

引理1 设$f=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p$为析取范式而且$p>1$。若单片语$\alpha$为$f$的FPI则，则$\alpha$必为某一$\alpha_i$。

证 给变量和其补都不在α中的那些变量赋值1/2，其余变量适当赋值，使$\alpha(a)=1$。于是

$f\geqslant\alpha\Longrightarrow f(a)=1\Rightarrow f$中存在单片语$\alpha_i$，有$\alpha_i(a)=1\Rightarrow\alpha_i$中的文字都在$\alpha$中（否则 $\alpha_i(a)\leqslant1/2)\Rightarrow\alpha_i\geqslant\alpha$。

又 α 是 f 的FPI且 $p>1$，从而推知

$\alpha=\alpha_i$ 。 □

引理2　设 $f=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p$ 为析取范式。若 β 为偶片语，$f\geqslant\beta$，且 β 不被 f 中任一片语所包含，则 β 不是满标偶片语。

证　设 $f=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p$，因 β 不被 f 中任一片语所包含，所以对任意的 $i=1,2,\cdots,p$，α_i 中的文字都不会全在 β 中．因而若 β 是满标偶片语，则 α_i 中至少有一文字与 β 中的不构成互补对的文字构成互补对．令 β 中构成互补对的变量为1/2，其余变量取0或1，使 $\beta(a)=1/2$，这时 $\alpha_i(a)=0$。

因 $f\geqslant\beta$，由 $\beta(a)=1/2$，知 $f(a)\geqslant1/2$。同时因 $\alpha_i(a)=0$ $(i=1,2,\cdots,p)$，又推得 $f(a)=0$，从而出现矛盾，所以 β 不可能是满标偶片语。 □

定理2　析取范式 $f=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p$ 为 f 的所有FPI的和，当且仅当(1)不存在含于其它片语的片语，(2)任意两个片语的模糊交感或不存在，或含于某个片语 α_i。

证　若 f 不是 f 的所有FPI的和，那么或 f 的某个FPI不在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 中，或 α_1，α_2，$\cdots$，α_p 的某个不是 f 的FPI。

首先设 f 的FPI α 不在其中，由引理1，α 是偶片语。显然 $\alpha\leqslant f$ 且 α 不含于 f 中任一片语。给 α 添加文字，使之成为不含于 f 中任一片语的最长偶片语 α'，此时 $\alpha'\leqslant\alpha\leqslant f$。由引理2，$\alpha'$ 不是满标偶片语，于是存在某个 i，有 x_i 与 $\bar{x}_i$ 都不在 α' 中．因 α' 是不被包含的"最长的"，故 $\alpha'x_i$ 必含于某片语 α_j 中，即 α_j 中的文字全在 $\alpha'x_i$ 中。因 α' 不含 $\bar{x}_i$，故 α_j 不含 $\bar{x}_i$。又因 α' 不被 α_j 包含，而 $\alpha'x_i$ 被 α_j 包含，所以 α_j 中必含 x_i。于是

可设$\alpha_j=\alpha'_j x_t$($\bar{x}_t$不在α'_j中)。同理，$\alpha'\bar{x}_t$必含于某片语α_k($k \neq j$)中，且有$\alpha_k=\alpha'_k\bar{x}_t$($x_t$不在$\alpha'_k$中)。

如果$\alpha'_j\alpha'_k$是偶片语，则$\alpha'_j\alpha'_k \in FC(\alpha_j,\alpha_k)$。若这个交感含于别的片语$\alpha_l$，即$\alpha'_j\alpha'_k \leqslant \alpha_l$，则由

$$\alpha' x_t \leqslant \alpha_j=\alpha'_j x_t,\ \alpha'\bar{x}_t \leqslant \alpha_k=\alpha'_k\bar{x}_t \Rightarrow \alpha' \leqslant \alpha'_j, \alpha' \leqslant \alpha'_k \Rightarrow \alpha' \leqslant \alpha'_j\alpha'_k \leqslant \alpha_l$$

这与α'不含于任何片语矛盾.故交感$\alpha'_j\alpha'_k$不含于其它片语。

如果$\alpha'_j\alpha'_k$是单片语，同样有$\alpha' \leqslant \alpha'_j\alpha'_k$.而$\alpha'$为偶片语，令$x_s$，$\bar{x}_s(s \neq t)$为其含有的互补对.于是$\alpha' x_s\bar{x}_s \leqslant \alpha'_j\alpha'_k x_s\bar{x}_s$，即$\alpha' \leqslant \alpha'_j\alpha'_k x_s\bar{x}_s$，这儿$\alpha'_j\alpha'_k x_s\bar{x}_s \in FC(\alpha_j,\alpha_k)$。若此交感含于别的片语$\alpha_m$，于是有$\alpha' \leqslant \alpha'_j\alpha'_k x_s\bar{x}_s \leqslant \alpha_m$。这又与$\alpha'$不含于别的片语相矛盾。所以交感$\alpha'_j\alpha'_k x_s\bar{x}_s$不含于别的片语。

综上，α_j和α_k的模糊交感任何时候都不含于其它片语，这与(2)矛盾。所以f的所有FPI都在α_1，α_2，…，α_p中。

其次设α_1，α_2，…，α_p中有片语α_i不是f的FPI，那么存在f的FPIβ有$\beta \geqslant \alpha_i$.而已证得f的所有FPI均在α_1，α_2，…，α_p中，故β为某一α_j.这表明f中存在片语α_i被另一片语α_j所包含，与(1)矛盾，故假设不成立。

若f中每个片语均为f的FPI，则(1)显然成立.由命题知f中任意两片语的模糊交感若存在，则必含于这两个片语之和，从而含于f本身，于是必含于f的某一FPI。而f为所有FPI之和，从而(2)成立。 □

由定理2和命题可得如下求FPI的算法。

算法 I

(1) 展开f为析取范式；

(2) 略去包含于其它片语的片语；

(3) 对任意两个片语求模糊交感，当模糊交感不存在或含于其它片语时即转(4)；否则加上所得模糊交感转(2)；

(4) 得到的式子即为f的所有FPI之和。

例4 求$[0,1]^4$上F－函数f的FPI，其中

$$f=x_1\bar{x}_1x_2\bar{x}_3+x_1\bar{x}_1x_2\bar{x}_4+x_1\bar{x}_1x_2x_3x_4.$$

解 f已满足步骤（1）和(2)。下设$\alpha_1=x_1\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$，$\alpha_2=x_1\bar{x}_1x_2\bar{x}_4$，$\alpha_3=x_1\bar{x}_1x_2x_3x_4$。求得模糊交感为

$FC(\alpha_1,\alpha_2)=\phi$，$FC(\alpha_1,\alpha_3)=\{x_1\bar{x}_1x_2x_4\}$，$FC(\alpha_2,\alpha_3)=\{x_1\bar{x}_1x_2x_3\}$。

设$\alpha_4=x_1\bar{x}_1x_2x_4$，$\alpha_5=x_1\bar{x}_1x_2x_3$。$\alpha_4$，$\alpha_5$都不含于其它片语，将其加到$f$上得

$$f=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5 \qquad (1)$$

又$FC(\alpha_1,\alpha_4)=\phi$，$FC(\alpha_1,\alpha_5)=\{x_1\bar{x}_1x_2\}$，$FC(\alpha_2,\alpha_4)=\{x_1\bar{x}_1x_2\}$，$FC(\alpha_2,\alpha_5)=\phi$，$FC(\alpha_4,\alpha_5)=\phi$。

再将$x_1\bar{x}_1x_2$加到(1)式中得

$$f=x_1\bar{x}_1x_2\bar{x}_3+x_1\bar{x}_1x_2\bar{x}_4+x_1\bar{x}_1x_2x_4+x_1\bar{x}_1x_2x_3+x_1\bar{x}_1x_2=x_1\bar{x}_1x_2.$$

前文已叙及，可通过求F－函数f的FPI而达到求最简式的目的。然而并非f的所有FPI都出现在f的最简式中，为避免不必要的计算，需进一步讨论。

定理5 设f是主析取式，则f中的一切单片语是f的FPI，反之，f的所有FPI中的单片语出现在f的主析取范式中。

证 若f中某单片语α不是f的FPI，设$f=\alpha+f'$，于是存在一单片语$\alpha'\neq\alpha$，有

$$\alpha\leqslant\alpha'\leqslant f\Longrightarrow f=f'+\alpha=f'+\alpha+\alpha'=f'+\alpha'.$$

显然$(f'+\alpha')$是由基本片语所组成，删去其中包含于其它片语的片语得主析取范式f''。显然f''不含α，而f含α，这与$F-$函数主析取范式的唯一性矛盾。从而定理前一结论成立。

定理后一结论是引理1的直接结果。 □

$F-$函数f的最简式f'也是析取范式，因而由引理1，f的FPI若为单片语，则必出现在f'中，于是由定理5，f的主析取式f''中的单片语必出现在f'中。再由命题，f''中的单片语间的模糊交感不出现在f'中，因而没有必要求f''中单片语间的模糊交感。

综上所述，可得求析取范式f的最简式算法。

算法Ⅱ

(1) 取至少一方为偶片语之间的模糊交感，求由此而得的一切FPI，设它们为α_1，α_2，…，α_n；

(2) 求f的主析取范式，设这时的单片语为β_1，β_2，…，β_m，满标偶片语为γ_1，γ_2，…γ_l；

(3) 从α_1，α_2，…，α_n中找出所有包含γ_1，γ_2，…，γ_l的最小组合，设它们为α'_1，α'_2，…，α'_s；

(4) $f=\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m+\alpha'_1+\alpha'_2+\cdots+\alpha'_s$，便是$f$的最简形式。

例5 试求$[0,1]^4$上下面$F-$函数的最简形式：

$$f=\bar{x}_2\bar{x}_4+x_1x_2\bar{x}_3+\bar{x}_1x_2x_4+x_1\bar{x}_2x_3x_4+x_1\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$$

解 f只有最后一项是偶片语，求它与其它片语间的模糊交感得：$x_1\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$，$x_1\bar{x}_1\bar{x}_3x_4$，$x_1\bar{x}_1\bar{x}_2x_4$。它们都不含于其它片语，将其加到 f 中，略去 $x_1\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$，再求交感最终得到 $\alpha_1=x_1\bar{x}_1\bar{x}_2$，$\alpha_2=x_1\bar{x}_1\bar{x}_3$，$\alpha_3=x_1\bar{x}_1x_4$。

f 已是主析取范式。单片语为 $\beta_1=\bar{x}_2\bar{x}_4$，$\beta_2=x_1x_2\bar{x}_3$，$\beta_3=\bar{x}_1x_2x_4$，$\beta_4=x_1\bar{x}_2x_3x_4$；满标偶片语为$\gamma_1=x_1\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$。

由步骤(3)作为包含γ_1的$\alpha_i(i=1,2,3)$的最小组合就是某一α_i，由(4)得f的最简式为：

$$f=\bar{x}_2\bar{x}_4+x_1x_2\bar{x}_3+\bar{x}_1x_2x_4+x_1\bar{x}_2x_3x_4+\left\{\begin{array}{l}x_1\bar{x}_1\bar{x}_2\\ x_1\bar{x}_1\bar{x}_3\\ x_1\bar{x}_1x_4\end{array}\right.$$

可见最简式不唯一。

§ 7.4 模糊逻辑函数的分解与合成

二值逻辑只取"1"、"0"两值，且具有明显的实际意义，例如它们可代表命题"真"或"假"电路"接通"或"断开"等。但在模糊逻辑中，函数取闭区间[0,1]上无限多值，而对取某一特定值(如0.3)往往意义不大，除非这个特定值预示着特殊的功能。这种情况给实际处理带来很大不便，为了弥补这个缺点，可把区间[0，1]分成有限个级，采用多

值逻辑的方法来处理模糊逻辑问题。

一般地，设把闭区间[0，1]分为n个级：

第一级　$\alpha_1 \leqslant x \leqslant 1$，

第二级　$\alpha_2 \leqslant x < \alpha_1$，

⋮　　　⋮

第n级　　$0 \leqslant x < \alpha_{n-1}$。

其中$0 < \alpha_{n-1} < \cdots < \alpha_2 < \alpha_1 < 1$。

进一步，还能给各级赋予适当的意义．例如$n = 3$时，可先假定一个对象x。若x在第一级，则表示对象属于该集合；若x在第三级，则表示对象不属于该集合；若x在第二级，则表示处于不分明状态。

对F－函数f，若$\alpha_m \leqslant f(x_1, x_2, \cdots, x_n) < \alpha_{m-1}$（$m = 1$时，后不等式取$\leqslant 1$），则称$f$属于第$m$级，下面我们通过例子来找出$f$属于第$m$级的条件。

例1　设$f(x, y) = x + \bar{y}$，试找出$f(x, y)$属于第m级$[\alpha_m, \alpha_{m-1})$的条件。

解　设　$\alpha_m \leqslant f(x, y) < \alpha_{m-1}$，这等价于

$$x + \bar{y} \geqslant \alpha_m \quad 且 \quad x + \bar{y} < \alpha_{m-1}. \tag{1}$$

由(1)的前一不等式，有

$$x \geqslant \alpha_m \quad 或 \quad \bar{y} \geqslant \alpha_m.$$

由(1)的后一不等式，有

$$x < \alpha_{m-1} \quad 且 \quad \bar{y} < \alpha_{m-1}.$$

因$\bar{y} \geqslant \alpha_m$　等价于$y \leqslant 1 - \alpha_m$，$\bar{y} < \alpha_{m-1}$等价于$y > 1 - \alpha_{m-1}$，于是得x，y应满足的条件

$$\left.\begin{matrix} x\geqslant\alpha_m \\ \text{或} \\ y\leqslant 1-\alpha_m \end{matrix}\right\} \text{且} \left\{\begin{matrix} x<\alpha_{m-1} \\ \text{且} \\ y>1-\alpha_{m-1} \end{matrix}\right\} \tag{2}$$

若把(2)式中前一组条件称为组一，后一组条件称为组二，则由例1知，获得组一和组二的过程以及组一和组二本身都是"对应"的。就组一和组二而言，组一中的α_m、$\geqslant$、$\leqslant$、或、且依次对应于组二中的α_{m-1}、$<$、$>$、且、或。所以实际应用时，可只求一组条件，另一组条件可"对应"地写出。

例2 $f(x,y,z)=x\bar{y}z+y\bar{z}$，试找出$f(x,y,z)$属于第$m$级$[\alpha_m,\alpha_{m-1})$的条件。

解 由$f(x,y,z)\geqslant\alpha_m$，得

$$x\bar{y}z\geqslant\alpha_m \quad \text{或} \quad y\bar{z}\geqslant\alpha_m$$

即

$$(x\geqslant\alpha_m\text{且}\bar{y}\geqslant\alpha_m\text{且}z\geqslant\alpha_m)\text{或}(y\geqslant\alpha_m\text{且}\bar{z}\geqslant\alpha_m)。$$

再将$\bar{y}\geqslant\alpha_m$写为$y\leqslant 1-\alpha_m$，$\bar{z}\geqslant\alpha_m$写为$z\leqslant 1-\alpha_m$，即得条件组一

$$\left.\begin{matrix} x\geqslant\alpha_m \\ \text{且} \\ y\leqslant 1-\alpha_m \\ \text{且} \\ z\geqslant\alpha_m \end{matrix}\right\} \text{或} \left\{\begin{matrix} y\geqslant\alpha_m \\ \text{且} \\ z\leqslant 1-\alpha_m \end{matrix}\right.。$$

$f(x,y,z)$应同时满足的条件组二可"对应"地写出

$$\left.\begin{cases} x<\alpha_{m-1} \\ \quad\text{或} \\ y>1-\alpha_{m-1} \\ \quad\text{或} \\ z<\alpha_{m-1} \end{cases}\right\} \text{且} \quad \begin{array}{c} y<\alpha_{m-1} \\ \text{或} \\ z\geqslant 1-\alpha_{m-1} \end{array}.$$

从上两例可以看出不仅组一和组二是"对应"的，而且变量所应满足的条件与表达式也有类似的对应关系。于是我们可以总结出构造析取范式$f(x)\geqslant\alpha_m(x\in[0,1]^n)$时变量应满足的条件集合组一和$f(x)<\alpha_{m-1}$时变量应满足的条件集合组二的规则如下：

(1) 在f中出现变量x_i，在组一中用$x_i\geqslant\alpha_m$与之对应；在f中出现变量的补$\bar{x}_i$，在组一中用$x_i\leqslant 1-\alpha_m$与之对应；在f中运算"+"与"·"，在组一中用联结词"或"与"且"与之对应。

(2) 将组一中的α_m改为α_{m-1}，"$\geqslant$"改为"$<$"，"$\leqslant$"改为"$>$"，"且"改为"或"，"或"改为"且"，其余不变，则得组二。

以上规则虽是从F—函数的析取范式归纳而得，对一般的F—函数也适用。

例3 设$f(x,y,z,w)=xy(\bar{z}+\bar{w})+\bar{x}\bar{y}+zw$，试求$f(x,y,z,w)$属于第$m$级$[\alpha_m,\alpha_{m-1})$变量应满足的条件。

解 由"规则"知变量应满足

$$\text{组一}\quad \left(\begin{array}{l} x\geqslant \alpha_m \\ \text{且} \\ y\geqslant \alpha_m \\ \text{且} \\ (z\leqslant 1-\alpha_m \text{ 或 } w\leqslant 1-\alpha_m) \end{array}\right) \text{或} \left(\begin{array}{l} x\leqslant 1-\alpha_m \\ \text{且} \\ y\leqslant 1-\alpha_m \end{array}\right)$$

$$\text{或}\quad \left(\begin{array}{l} z\geqslant \alpha_m \\ \text{且} \\ w\geqslant \alpha_m \end{array}\right),$$

$$\text{组二}\quad \left(\begin{array}{l} x<\alpha_{m-1} \\ \text{或} \\ y<\alpha_{m-1} \\ \text{或} \\ (z>1-\alpha_{m-1}\text{且 } w>1-\alpha_{m-1}) \end{array}\right)$$

$$\text{且}\quad \left(\begin{array}{l} x>1-\alpha_{m-1} \\ \text{或} \\ y>1-\alpha_{m-1} \end{array}\right) \text{且} \left(\begin{array}{l} z<\alpha_{m-1} \\ \text{或} \\ w<\alpha_{m-1} \end{array}\right).$$

以上问题称为模糊逻辑函数的分解。现讨论分解问题的逆问题，称为模糊逻辑函数的合成。仍以例子加以说明。

例4　设变量x，y，z满足：

$$\left(\begin{array}{l} x\geqslant \alpha_1 \\ \text{且} \\ y\leqslant 1-\alpha_1 \end{array}\right) \text{或} \left(\begin{array}{l} x\geqslant \alpha_1 \\ \text{且} \\ y\geqslant \alpha_1 \\ \text{且} \\ z\leqslant 1-\alpha_1 \end{array}\right) \text{或} \left(\begin{array}{l} x\leqslant 1-\alpha_1 \\ \text{且} \\ y\leqslant 1-\alpha_1 \\ \text{且} \\ z\geqslant \alpha_1 \end{array}\right). \tag{3}$$

试求属于第一级$[\alpha_1,\ 1]$的F－函数。

解　设所求的F－函数$f(x,y,z)$，那么当x，y，z满足(3)

式时，此函数应满足

$$\alpha_1 \leqslant f(x,y,z) \leqslant 1,$$

上式的后一不等式恒成立，所以只须考虑前一不等式。将(3)式中给出的条件作为组一，由本节的“规则”从组一反推出f，得

$$f(x,y,z)=x\bar{y}+xy\bar{z}+\bar{x}\bar{y}z\ .$$

本节以下部分及§7.5节中的“·”运算均不省略，若省略，则表普通乘法(如xy表示x与y的普通乘积)。

例5　设变量x，y，z满足：

$$\left\{\begin{array}{c} x\geqslant b_1 \\ 且 \\ y\leqslant b_2 \end{array}\right\} 或 \left\{\begin{array}{c} x\leqslant b_2 \\ 且 \\ y\geqslant b_3 \end{array}\right\} 或 \left\{\begin{array}{c} x\geqslant b_1 \\ 且 \\ y\geqslant b_3 \\ 且 \\ z\leqslant b_4 \end{array}\right\} \quad (4)$$

试求属于第一级$[\alpha_1, 1]$的F－函数，其中b_1，b_2，b_3，$b_4\in(0，1]$。

解　此题不能从(4)式直接得到F－函数，需要先进行转换。分别用待定正数$w_i(i=1,2,\cdots,7)$乘(4)式中各不等式，得

$$\left\{\begin{array}{c} w_1x\geqslant b_1w_1 \\ 且 \\ w_2x\leqslant b_2w_2 \end{array}\right\} 或 \left\{\begin{array}{c} w_3x\leqslant b_2w_3 \\ 且 \\ w_4y\geqslant b_3w_4 \end{array}\right\} 或$$

$$\left.\begin{array}{c} w_5 x \geqslant b_1 w_5 \\ \text{且} \\ w_6 y \geqslant b_3 w_6 \\ \text{且} \\ w_7 z \leqslant b_4 w_7 \end{array}\right\} \qquad (5)$$

令$b_1 w_1 = \alpha_1$，$b_2 w_2 = 1 - \alpha_1$，$b_2 w_3 = 1 - \alpha_1$，$b_3 w_4 = \alpha_1$，$b_1 w_5 = \alpha_1$，$b_3 w_6 = \alpha_1$，$b_4 w_7 = 1 - \alpha_1$。

即 $w_1 = w_5 = \dfrac{\alpha_1}{b_1}$，$w_2 = w_3 = \dfrac{1-\alpha_1}{b_2}$，$w_4 = w_6 = \dfrac{\alpha_1}{b_3}$，

$w_7 = \dfrac{1-\alpha_1}{b_4}$。

于是(5)式变为

$$\left\{\begin{array}{c} w_1 x \geqslant \alpha_1 \\ \text{且} \\ w_2 y \leqslant 1 - \alpha_1 \end{array}\right\} \text{或} \left\{\begin{array}{c} w_3 x \leqslant 1 - \alpha_1 \\ \text{且} \\ w_4 y \geqslant \alpha_1 \end{array}\right\}$$

$$\text{或} \left\{\begin{array}{c} w_5 x \geqslant \alpha_1 \\ \text{且} \\ w_6 y \geqslant \alpha_1 \\ \text{且} \\ w_7 z \leqslant 1 - \alpha_1 \end{array}\right\} \qquad (6)$$

将乘上常数因子的变量(如$w_1 x$)视为新变量，由(6)式得

$$f(x,y,z) = (w_1 x) \cdot \overline{(w_2 y)} + \overline{(w_3 x)} \cdot (w_4 y) + (w_5 x) \cdot (w_6 y) \cdot \overline{(w_7 z)}$$

实际上求得的函数已不是原始定义的 F—函数，我们把它看为推广了的 F—函数。

§ 7.5 模糊逻辑电路

本节讨论与F—函数对应的模糊逻辑电路。

一、基本电路

借助于二级管和三级管很容易在电路上实现模糊逻辑的三种基本运算；析取(或)、合取(与)及求补。

如图 1 (a) 所示的晶体管反相器可实现求补运算。图中V_x相当于F—函数x，输出电压为$V_0=V_{cc}-V_x$，这等价于$\bar{x}=1-x$。在设计反相器时应确保输入—输出的特征函数类似于图 1 (b)，这可通过晶体管的偏置获得很好的近似。

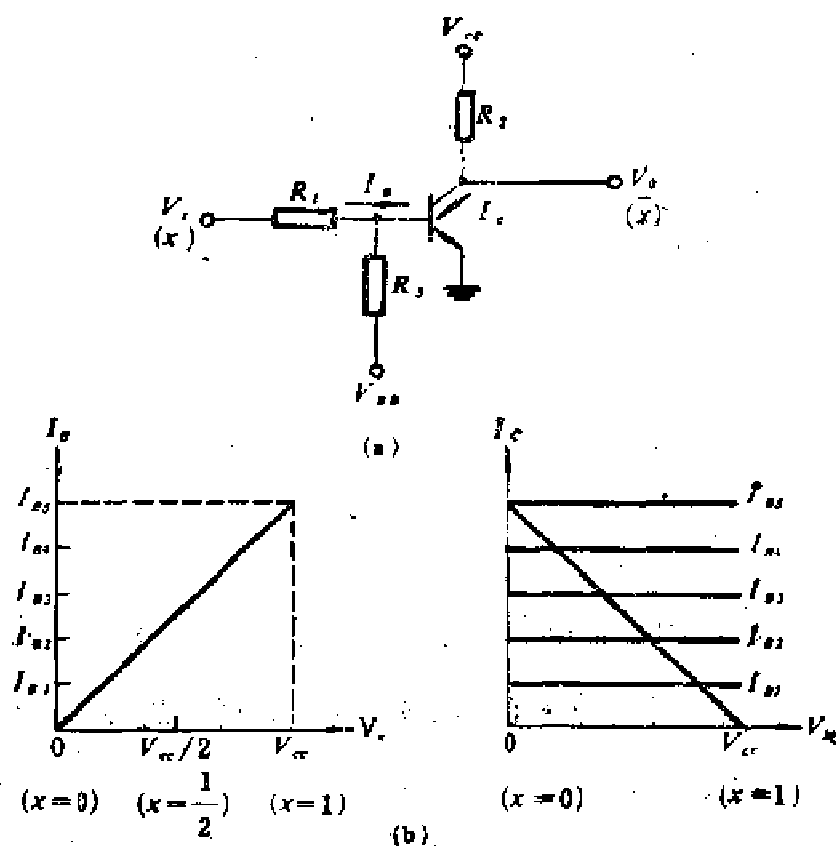


图 1　模糊逻辑补电路

⑧

∴$x\cdot y$和$x+y$的电路实现同二值逻辑的逻辑运算"与"、"或"的电路实现相同，分别如图2、图3所示。

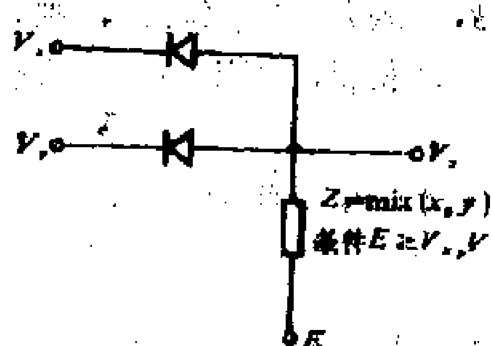


图2 "与"门

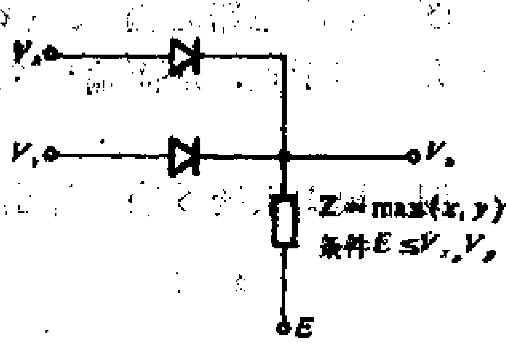


图3 "或"门

二、例

一个F—函数(这里指推广了的F—函数)实际上是变量的析取、合取和补以及数与变量相乘组成的式子。而析取、合取与求补可由一中电路实现，至于变量前出现的乘法因子，这可由乘法模拟器实现，所以一个F—函数总能电路实现。如在上节例5中的函数。(电路实现如图4。)

$$f(x,y,z)=(w_1x)\cdot\overline{(w_2y)}+\overline{(w_3x)}\cdot(w_4y)+(w_5x)\cdot(w_6y)\cdot\overline{(w_7z)} \quad (1)$$

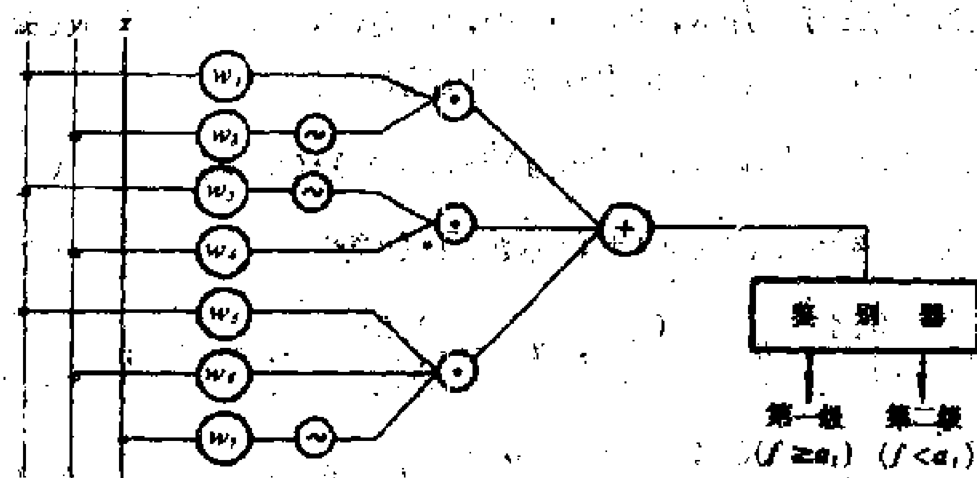


图4 (1)式的电路实现

其中⊖、⊙和⊕分别代表图1、图2和图3中补、与、或电路。

图4中的电路若输入的x，y，z满足§3中(4)式，则输出必大于等于a_1，从而输出在第一级获得，否则在第二级获得。

例 模糊系统S有单输出，当x，y，z满足

$$
\text{组一}\left\{\begin{matrix} x\geqslant b_1 \\ \text{或} \\ y\leqslant b_2 \end{matrix}\right\} \text{ 且 } \{x\leqslant b_3\} \text{ 且 } \{z\geqslant b_4\}
$$

且 (2)

$$
\text{组二}\left\{\begin{matrix} x\geqslant b_5 \\ \text{且} \\ y\geqslant b_6 \end{matrix}\right. \text{ 或 } \{z\leqslant b_7\}
$$

时，产生的输出R满足$0.4\leqslant R\leqslant 0.6$.试确定其电路实现。

解 (2)式中组一和组二不“对应”，所以不能得到同一函数.分别设当组一和组二条件满足时得函数f_1和f_2，即各自条件满足时，$f_1(x,\ y,\ z)\geqslant 0.4$，$f_2(x,\ y,\ z)\leqslant 0.6$（或$\bar{f}_2(x,y,z)\geqslant 0.4$.利用§3中例5的方法可推得

$$
f_1(x,y,z)=[(w_{11}x)+(\overline{w_{12}y})]\cdot(\overline{w_{13}x})\cdot(w_{14}z), \tag{3}
$$

$$
f_2(x,y,z)=[(\overline{w_{21}x})+(\overline{w_{22}y})]\cdot(w_{32}z). \tag{4}
$$

其中$w_{11}=\dfrac{0.4}{b_1}$，$w_{12}=\dfrac{0.6}{b_2}$，$w_{13}=\dfrac{0.6}{b_3}$，$w_{14}=\dfrac{0.4}{b_4}$，

$w_{21}=\dfrac{0.4}{b_5}$，$w_{22}=\dfrac{0.4}{b_6}$，$w_{23}=\dfrac{0.6}{b_7}$，$b_i\neq 0(i=1,2,\cdots,7)$.

这系统的电路实现如图5所示（假定当x,y,z满足条件组一和组二时，不同时出现$f_1(x,y,z)>0.6$和$f_2(x,y,z)<0.4$）。其中两个阈元件T_m和T_{m-1}应分别调节到当$f_1(x,y,z)\geqslant 0.4$及$f_2(x,y,z)\leqslant 0.6$时有响应。

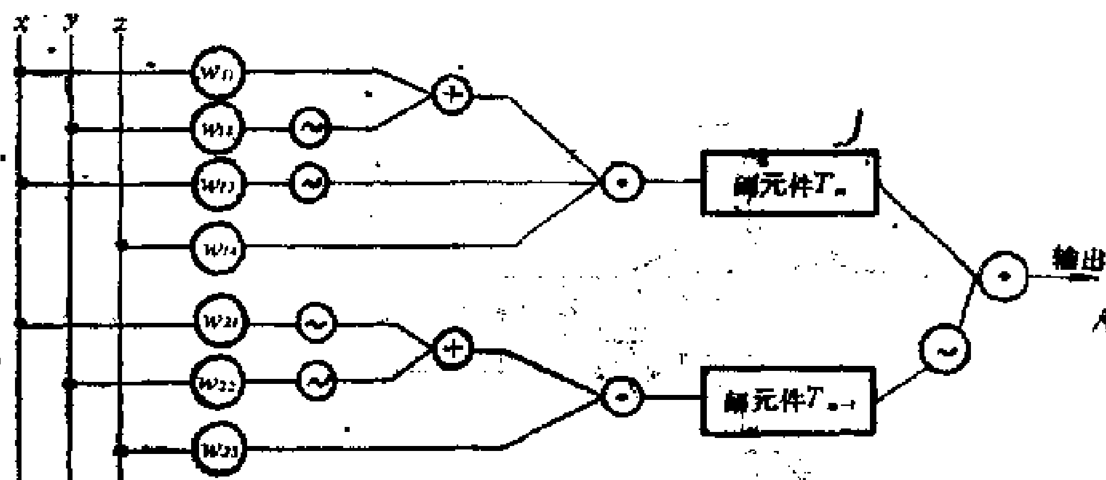


图5　(3)式和(4)式的电路实现

三、　基本电路的改进

本节一中描述的基本电路在变量的整个范围内都不是线性的，且都与一个"离差"因子相联系。本节下面描述的电路不但能克服上述弱点，且能执行乘上一个因子和其它通常的代数运算。

模糊"或"函数的电路实现如图6所示。这儿用有源半波整流器代替简单二极管。半波整流器如图7所示。当输入e为正量时，输出量e_o'也是正的，故二极管D_F导通，将开关电阻R_F接入反馈通路中。可证

$$\frac{e_o'}{e_i}=\frac{R_G}{R_F'+R_G}\cdot\frac{R_F+R_G'}{R_G'}. \tag{5}$$

其中 e_o' 是有效输出而 $R_F \gg r_f$，r_f 为二极管的正向电阻。

通过选择电阻的值，整流器的增益可以改变。图 6 中有 n 个整流器，这些整流器输出时，有最大输出的整流电路中的二极管 D_F 导通，所有其它二极管 D_F 被反相偏置。这样"或"电路（或称"或"门）的输出是这些整流器有效输出的最大值。

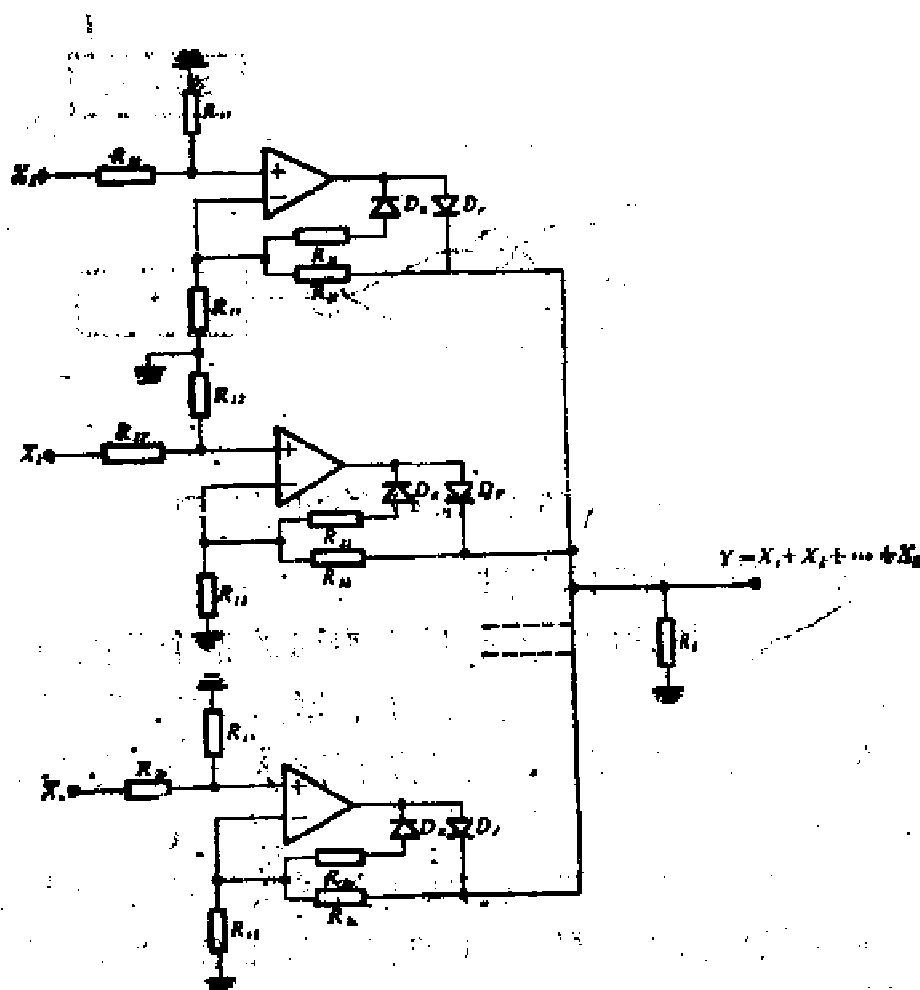


图6 模糊"或"门

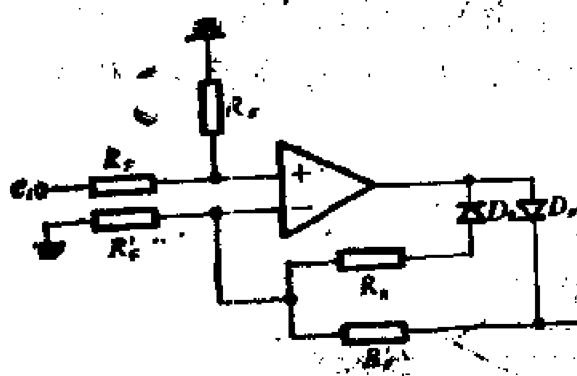


图7　半波整流器

反相器(可实现逻辑补)电路如图8所示。从功能上说，它是一种差分放大器。输出关系如下：

$$e_0=(e_1-e_2)k. \tag{6}$$

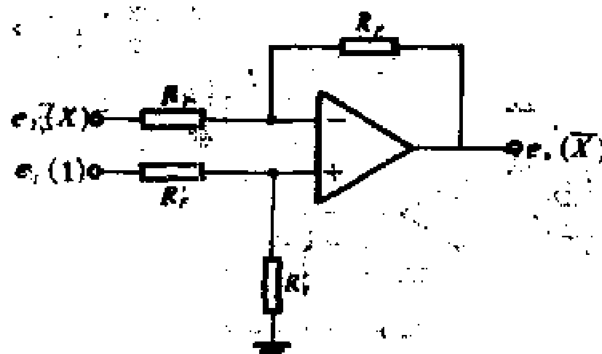


图8　模糊逻辑反相器

如使 e_1 等于逻辑值1，由关系式(5)及(6)，显然输出和带乘法因子 k 的输入是相反的。

关系式

$$x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n=\overline{(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\cdots+\bar{x}_n)}$$

启发我们，若在模糊“或”门中，每个通道反相输入，最后的输出再反相便能实现模糊“与”函数。一个具体的“与”

门如图 9 所示。其中输入的反相是这样实现的：改变“与”门中输入端到反相端，并将一个等于逻辑值 1 的参考电平加到非反相端。

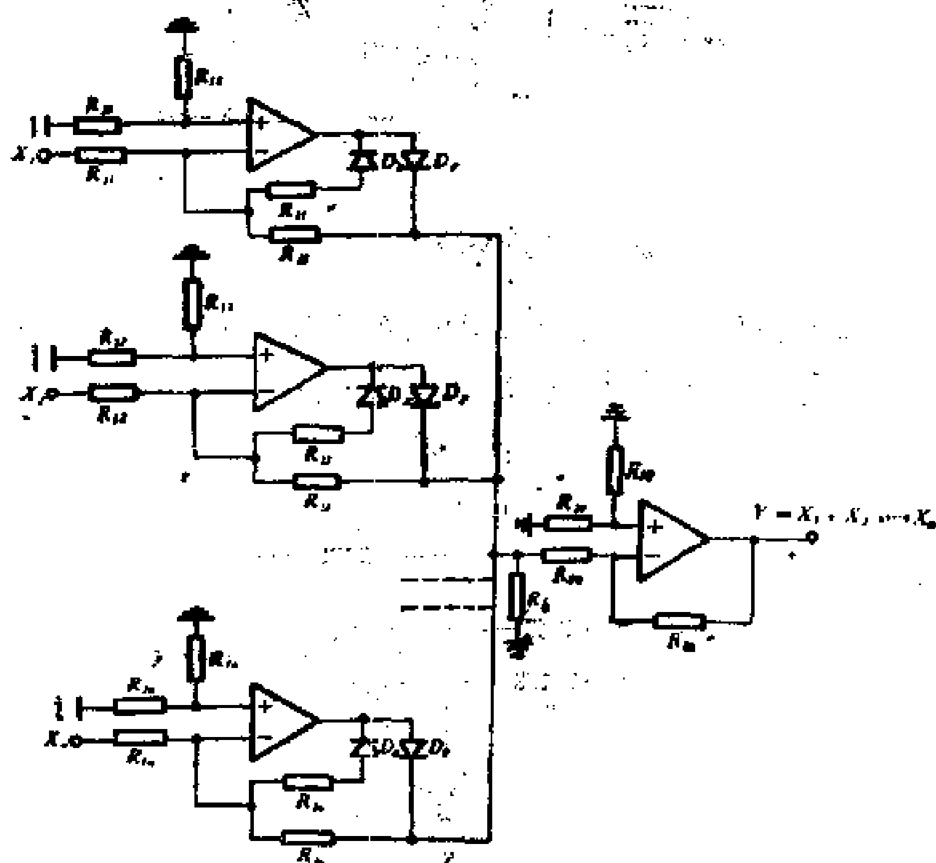


图9 模糊“与”门

四、一个 n 级鉴别器

图 4 中曾给出鉴别器，其作用是将输入以 a_i 为界而分别输出，这电路在输入的临界值不能有任何含糊。由于鉴别器的决策机制，它在模糊逻辑系统中起着重要作用，但由于变量可取 0 到 1 范围内的任何值，于是当分级区间相当小时，采用更精确的电路是十分必要的。

一个 n 级鉴别器如图 10 所示。图中每个分级比较器的

参考电平是前述级的最大极限。当输入属于第 p 级时，则第 p 级到第 n 级的分级比较器都取 1 值，即图 10 左半部的输出为$(\phi,\phi,\cdots,\phi,1,1,\cdots,1)$，其中$\phi\neq1$。通过译码电路后，其输出为$(\phi,\cdots,\phi,1,\phi,\cdots,\phi)$，这是仅有一个1输出的$n$元代码。

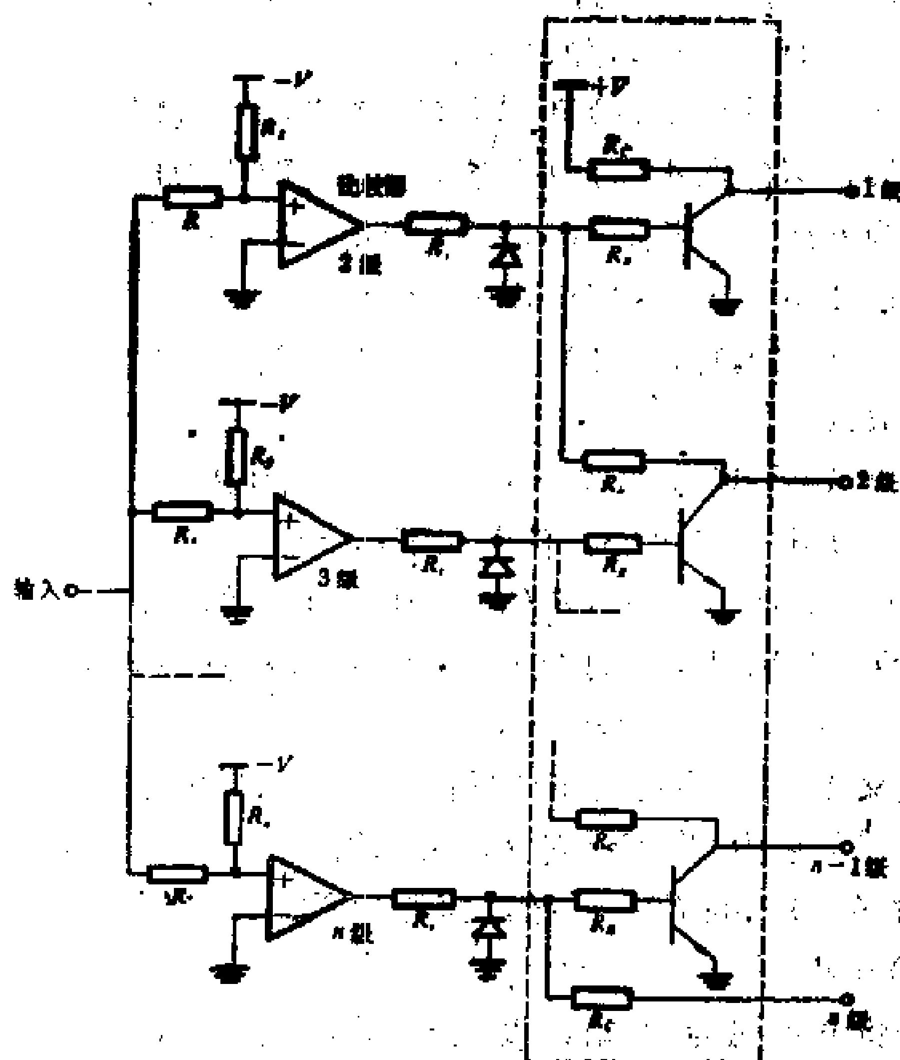


图10 一个 n 级鉴别器

§ 7.6 F—函数的个数的估计

在二值逻辑中，n 变元的布尔函数的个数容易求得，有 2^{2^n} 个，然而求 n 变元的 F—函数的个数却很困难，目前只有一些估计式。下面我们来推导其中一个估计式。令

$A(n)=\{a|a\in\{0,1/2,1\}^n\}$，

$A_i(n)=\{a|a\in A(n)$ 且 a 恰有 i 个坐标取值1/2$\}$。

如果把 $A(n)\setminus A_0(n)$ 中的点 a 中某些取值为1/2的坐标换为取值为 0 或 1，那么称点 a 被断化，用 $a!b$ 表示 a 被断化为 b，用 $a!!c$ 表示 a 被全部地断化为 c。

例如 $a=(0,1/2,1/2)$，$b=(0,1/2,1)$，$c=(0,1,0)$，则有 $a!b, a!!c$。

对定义于 $A(n)$ 的非空子集 $A'(n)$ 上的取值为$\{0,1/2,1\}$的函数，提出一组"F3条件"如下：

(i) 若 $a\in A_0(n)\cap A'(n)$，则 $f(a)\in\{0,1\}$；

(ii) 对满足 $a!b$ 的 $b(a,b\in A'(n))$，若 $f(a)=0$，则$f(b)=0$；若 $f(a)=1$，则 $f(b)=1$。

定义 1 若 $A'(n)$ 上的取值为$\{0,1/2,1\}$的函数满足$F3$条件，则称它为 $A'(n)$上的 **F3—函数**。

对 $A(n)$上的 $F3$—函数，简称为 $F3$—函数。此时$A_0(n)\cap A(n)=A_0(n)$。

若将 0 也视为片语，设 $a^i=(a^i_1, a^i_2, \cdots, a^i_n)\in A(n)$ 取 $F3$—函数 g，作片设 $\theta_g{}^i$，其定义为

(i) 当 $g(a^i)=1$时，若$a_j{}^i=1$，则x_j属于 $\theta_j{}^i$，$\bar{x}_j$ 不属于 $\theta_g{}^i$；若 $a_j{}^i=0$，则 x_j 不属于 $\theta_i{}^i$，$\bar{x}_j$ 属于 $\theta^i{}_g$；若 $a_j{}^i=1/2$，则x_j，$\bar{x}_j$，都不属于 $\theta_g{}^i$；

(ii) 当$g(a^i)=1/2$时，若$a^i{}_j=1$，则x_j属于$\theta_g{}^i$，$\bar{x}_j$不属于$\theta_g{}^i$；若$a^i{}_j=0$，则x_j不属于$\theta_g{}^i$，$\bar{x}_j$属于$\theta_g{}^i$；若$a^i{}_j=1/2$，则x_j，$\bar{x}_j$都属于$\theta_g{}^i$；

(iii) 当$g(a^i)=0$时，$\theta_g{}^i=0$。

因g为$F3$—函数，只有当$a^i\notin A_0(n)$时，才有可能$g(a^i)=1/2$，故(ii)中的$\theta_g{}^i$为偶片语。

例1 设g为$F3$—函数，$a^i=(1, 0, 1/2)$，则

$$\theta_g{}^i=\begin{cases} x_1\bar{x}_2, & 若\ g(a^i)=1, \\ x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_3, & 若\ g(a^i)=1/2, \\ 0, & 若\ g(a^i)=0. \end{cases}$$

引理1 对任意的不恒为1的$F3$—函数g，用Σ表示取最大，则对$\forall a^i\in A(n)$，有

$$\sum_{a^j\in A(n)}\theta_g{}^j(a^i)=g(a^i).$$

证 由$\theta_g{}^i$的定义，易知当$g\neq1$时，$\theta_g{}^i(a^i)=g(a^i)$，所以只须证对$\forall a^i$，$a^j\in A(n)$，有$\theta_g{}^i(a^i)\geqslant\theta_g{}^j(a^i)$即可，这儿$g\neq1$。

首先若a^i，a^j不存在晰化关系，则存在一个k，有① $a^i{}_k=0$，$a^j{}_k=1$或② $a^i{}_k=1$，$a^j{}_k=0$。对①或$\theta_g{}^j$含有x_k，或$\theta_g{}^j=0$．而$a^i{}_k=0$，故$\theta_g{}^j(a^i)=0$。同理，对②也有$\theta_g{}^j(a^i)=0$，因而此时恒有$\theta_g{}^i(a^i)\geqslant\theta_g{}^j(a^i)$。

下设a^i，a^j存在晰化关系，$i\neq j$。

当$g(a^i)=1$时，$\theta_g{}^i(a^i)=1\geqslant\theta_g{}^j(a^i)$。

当$g(a^i)=1/2$时，$\theta^i{}_g(a^i)=1/2$．若$a^j\geqslant a^i$，则由$F3$条件(ii)，必有$g(a^j)=1/2$，从而$\theta_g{}^j$为偶片语，有$\theta_g{}^j(a^i)$

$\leqslant 1/2$；若 $a^i \nmid a^j$，这时存在一个 k 有 $a^i{}_k = 1/2$，$a_k^j = 0$ 或 1。于是当 $\theta_g^j \neq 0$ 时，$\bar{x}_k$ 与 x_k 至少有一个存在于 θ_g^j 中，又 $a_k^i = 1/2$，故 $\theta_g^j(a^i) \leqslant 1/2$；$\theta_g^j = 0$ 时，$\theta_g^j(a^i) = 0$。所以此时有 $\theta_g^i(a^i) \geqslant \theta^j{}_g(a^i)$。

当 $g(a^i) = 0$时，$\theta_g^i(a^i) = 0$。① 若 $a^i \uparrow a^j$，则由 $F3$ 条件(ii)，$g(a^j) = 0$，从而 $\theta_g^j = 0$，所以 $\theta_g^i(a^i) = \theta_g^j(a^i)$。② 若 $a^j \nmid a^i$，由 $F3$ 条件(ii) 或 $g(a^j) = 0$ 或 $g(a^j) = 1/2$。$g(a^j) = 0$ 时①已讨论。设 $g(a^j) = 1/2$。由 $a^j \nmid a^i$ 知存在一个 k 有 $a^j{}_k = 1/2$(从而 $x_k \bar{x}_k$ 存在于 θ_g^j 中)，$a^i{}_k = 0$(或 1)，于是 $\theta^j{}_g(a^i) = 0 = \theta_g^i(a^i)$。

综上，在任何情况下都有 $\theta_g^i(a^i) \geqslant \theta_g^j(a^i)$，故对 $\forall a^i \in A(n)$，有

$$\sum_{a^j \in A(n)} \theta_g^j(a^i) = \theta_g^i(a^i) = g(a^i). \qquad \square$$

定理 1 对任意的F—函数 f,若将 f 的定义域限制在$\{0, 1/2, 1\}^n$上，则 f 是一个 $F3$—函数。反之对任意的 $F3$—函数 g，则一定存在一个 F—函数 f，使得对 $\forall a^i \in A(n)$，有 $f(a^i) = g(a^i)$。

证 任取 F—函数 f，若限制 $x \in \{0, 1/2, 1\}^n$，则显然 $f(x) \in \{0, 1/2, 1\}$ 且满足 $F3$ 条件(i)。下证 f 满足$F3$条件(ii)。

设 a^i，$a^j \in A(n)$，有 $a^i \nmid a^j$。将 f 化为析取范式。

若 $f(a^i) = 1$，那么存在单片语 α，有 $\alpha(a^i) = 1$。这表明对 $a_k^i = 1/2$ 的 k，x_k 与 $\bar{x}_k$ 都不存在于 α，而从a^i 到 a^j 只改变了 a^i 中某些取值为 1/2 的分量，故 $\alpha(a^j) = 1$，从而 $f(a^j) = 1$。

若$f(a^i)=0$，则对f中任一片语β，有$\beta(a^i)=0$。这表明存在一个k，有x_k属于β，同时$a^i_k=0$，或$\bar{x}_k$属于β，同时$a^i_k=1$，但无论$a^i_k=0$或1都有$a^j_k=a^i_k$，所以$\beta(a^j)=0$，从而$f(a^j)=0$。

综上，f满足$F3$条件，故将f的定义域限制在$\{0,1/2\ 1\}^n$上，f是$F3$—函数。

反之，取不恒为1的$F3$—函数g，设$f=\sum_{a^i\in A(n)}b^i_g$，

由引理1，对$\forall\ a^i\in A(n)$，有

$$f(a^i)=\sum_{a^j\in A(n)}b^j_g(a^i)=g(a^i)$$。

对$g\equiv1$，取$f\equiv1$，显然也有$f(a^i)=g(a^i)$。 □

推论 n元F—函数的个数等于$A(n)$上$F3$—函数的个数。

推论表明估计F—函数的个数等价于估计$A(n)$上的$F3$—函数的个数。下面我们进行这一工作。

把所有$F3$—函数作成一集合，记为$F(n)$。再把$F(n)$中对于$A(n)\backslash A_0(n)$的点取值均不为1的作成一子集$F_1(n)$；取值均不为0的，作成一子集$F_0(n)$；取值既有0又有1的，作成一子集$F_2(n)$。

易知：$F(n)=F_0(n)\cup F_1(n)\cup F_2(n)$，$F_2(n)\cap F_0(n)=F_2(n)\cap F_1(n)=\phi$，$F_0(n)\cap F_1(n)=\{f\ f\in F(n)$且当$a\in A(n)\backslash A_0(n)$时，$f(a)=1/2\}$。

在对所有的$a\in A(n)\backslash A_0(n)$，$f(a)=1/2$的条件下，$F3$—函数对属于$A_0(n)$的点取值不受$F3$条件(ii)的约束，即每个$A_0(n)$的点，函数都可取值0或1，而$A_0(n)$有$2^n$个点，于是可

以推知 $F_0(n)\cap F_1(n)$ 包含 2^{2^n} 个函数，即 $|F_0(n)\cap F_1(n)|=2^{2^n}$。故

$$|F(n)|=|F_0(n)\cup F_1(n)\cup F_2(n)|$$
$$=|F_0(n)|+|F_1(n)|+|F_2(n)|-2^{2^n}. \qquad (1)$$

由 $F_0(n)$、$F_1(n)$ 的定义，容易推得

$$|F_0(n)|=|F_1(n)|.$$

由上式及(1)式可得以下命题。

命题1 $|F(n)|=2|F_1(n)|+|F_2(n)|-2^{2^n}$.

例 2　直接计算可知 $|F_1(2)|=48$，$|F_2(2)|=4$，于是

$$|F(2)|=2\times 48+4-2^{2^2}=84.$$

下面估计 $|F_2(n)|$，为此先作一些准备。令

$$A_1(n,\ i)=\{a\,|\,a\in A_1(n),\ \text{且}\ a_i=\frac{1}{2}\},\ i=1,2,\cdots,n.$$

如果 $a\in A_1(n)$，则 a 中只有一个分量取值 1/2，经晰化可将该分量改为 0 或改为 1，所以在 $A_0(n)$ 中恰有两个不同点 a' 和 a'' 满足 $a\,!\,a'$，$a\,!\,a''$。进而当 $n\geqslant 2$ 时，在 $A_1(n,\ i)$ 中任取两个不同点 a 和 b，经晰化可得 $A_0(n)$ 中 4 个各不相同的点 a'，a''，b'，b''。于是可按如下规则作函数 f：

(i)　$\left.\begin{array}{l} f(a)=f(a')=f(a'')=0 \\ f(b)=f(b')=f(b'')=1 \end{array}\right\}$　$a,b\in A_1(n,i)$，且 $a\,!\,a'$，$a\,!\,a''$，$b\,!\,b'$，$b\,!\,b''$；

(ii)　$f(c)=\frac{1}{2}$　$c\in(A(n)\setminus A_0(n))\setminus\{a,\ b\}$；

(ii)　$A_0(n)\setminus\{a',\ a'',\ b',\ b''\}$ 中 $m(m=|A_0(n)|-4$

$=2^n-4$）个点，每一点赋一个取自$\{0, 1\}$的值。

由 f 的作法和 $F_2(n)$ 的定义可得以下引理。

引理2 $f\in F_2(n)$。

命题2 $|F_1(n)|\leqslant \frac{1}{2}\{|F(n)|-2^{2^n}[2^{n-5}n(2^{n-1}-1)-1]\}$，$n\geqslant 2$。

证 对上文所作的那种类型的函数 f，由于 a、b 的取法有$\binom{2^{n-1}}{2}$种（因$|A_1(n,i)|=2^{n-1}$）；每取定一对 a、b，按(i)的规则有两种方法（0，1 互换）赋值；任意选定一种(i)的赋值法，再按(ii)、(iii)的规则赋值。此时(ii)有一种方法，(iii)有2^m种赋值法。再考虑到 i 可取1，2，…，n，于是可得 $n\cdot\binom{2^{n-1}}{2}\cdot 2\cdot 2^m$个属于$F_2(n)$的函数。所以

$$|F_2(n)|\geqslant n2^{m+1}\binom{2^{2n-1}}{2}=n\,2^{2^n}\cdot 2^{n-5}(2^{n-1}-1).$$

由命题1，$n\geqslant 2$时，有

$$|F_1(n)|=\frac{1}{2}(|F(n)|-|F_2(n)|+2^{2^n})$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\{|F(n)|-2^{2^n}\cdot[n2^{n-5}(2^{n-1}-1)-1]\}. \qquad \square$$

将 $A(n+1)$ 的点，按其第 $n+1$ 个坐标为0、1/2和1分为三类，分别记为$A^0(n+1)$、$A^*(n+1)$和$A^1(n+1)$。再设

$$A_i^*(n+1)=A_i(n+1)\cap A^*(n+1)。$$

现任取一个定义于$A^0(n+1)\cup A^1(n+1)$上的$F3$—函数 f，令

$f^*: A(n+1)\to\{0, \frac{1}{2}, 1\}$,

$$f^*(a)=\begin{cases} f(a), & \text{当 } a\in A^0(n+1)\cup A^1(n+1); \\ \varphi(a), & \text{当 } a\in A^*(n+1). \end{cases} \quad (2)$$

对其中的 $\varphi(a)$ 作出规定，使得 $f^*(a)$ 是 $A(n+1)$ 上的 $F3$—函数。很明显首先 $\varphi(a)$ 应是 $A^*(n+1)$ 上的 $F3$—函数。令

$F^*(n+1)=\{f^* | f^* \text{是(2)式所指的函数}\}$,

$\Phi^*(n+1)=\{\varphi | \varphi \text{是(2)式中的} \varphi(a)\}$。

$F^*(n+1)$ 中的函数对属于 $A^0(n+1)\cup A^1(n+1)$ 的点都取同一值 $f(a)$，而 $f(a)$ 是既定函数，故

$$|F^*(n+1)|=|\Phi^*(n+1)|. \quad (3)$$

以下我们估计 $|\Phi^*(n+1)|$。

取定一 $\varphi\in\Phi^*(n+1)$，将 $A^*(n+1)$ 的点按 φ 是否取值1/2分为两类，再将取值1/2的一类按 a 是否在 $A_1^*(n+1)$ 中又分为两类。设

$X(\varphi, 1)=\{a | \varphi(a)=1 \text{或} \varphi(a)=0\}$,

$X(\varphi, 2)=\{a | \varphi(a)=\frac{1}{2}\}\cap(A^*(n+1)\setminus A_1^*(n+1))$,

$X(\varphi, 3)=\{a | \varphi(a)=\frac{1}{2}\}\cap A_1^*(n+1)$.

任取 $a=(a_1, a_2, \cdots, a_n, 1/2)\in A^*(n+1)$, $a^T=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$。

显然 T 是 $A^*(n+1)$ 到 $A(n)$ 的单满映射。

有了以上定义，依据 $X(\varphi, i)$，相应地可将 $A(n)$ 中的点分为三类：

$X^T(\varphi, i)=\{a^T | a\in X(\varphi, i)\}$, $i=1, 2, 3$.

引理3 (i) $X^{\mathrm{T}}(\varphi, 2) \subseteq A(n) \setminus A_0(n)$;

(ii) $X^{\mathrm{T}}(\varphi, 3) \subseteq A_0(n)$.

证明留给读者.

现在构造$A(n)$上的函数φ^{T}.对$\forall\ b \in A(n)$，令

$$\varphi^{\mathrm{T}}(b) = \begin{cases} 0, & \text{当 } b \in X^{\mathrm{T}}(\varphi, 1), \\ \dfrac{1}{2}, & \text{当 } b \in X^{\mathrm{T}}(\varphi, 2), \\ 1, & \text{当 } b \in X^{\mathrm{T}}(\varphi, 3). \end{cases}$$

引理4 $\varphi^{\mathrm{T}} \in F_1(n)$.

证 φ^{T}显然是$A(n)$上值域为$\{0, 1/2, 1\}$的函数.由φ^{T}的定义，只有当$b \in X^{\mathrm{T}}(\varphi, 2)$时，才有$\varphi^{\mathrm{T}}(b) = 1/2$.而由引理3，$X^{\mathrm{T}}(\varphi, 2) \subseteq A(n) \setminus A_0(n)$，所以只有当$b \in A_0(n) \setminus A_0(n)$时，才可能有$\varphi^{\mathrm{T}}(b) = 1/2$。换言之，当$b \in A_0(n)$时，$\varphi^{\mathrm{T}}(b) = 0$或1，这表明$\varphi^{\mathrm{T}}$满足$F3$条件(i)。

因T是$A^*(n+1)$到$A(n)$的单满映射，故$A(n)$中的点都可写为a^{T}的形式，其中$a \in A^*(n+1)$.

取$a^{\mathrm{T}} \in A(n) \setminus A_0(n)$，$b^{\mathrm{T}} \in A(n)$，满足$a^{\mathrm{T}} ! b^{\mathrm{T}}$.由映射$T$和断化的定义不难得出$a ! b$.

若$\varphi^{\mathrm{T}}(a^{\mathrm{T}}) = 0$，由$\varphi^{\mathrm{T}}$的定义，$a^{\mathrm{T}} \in X^{\mathrm{T}}(\varphi, 1)$.于是$a \in X(\varphi, 1)$，因而$\varphi(a) = 0$或$\varphi(a) = 1$.当$\varphi(a) = 0$时，因$\varphi$是$A^*(n+1)$上的$F3$—函数，$a ! b$，由$F3$条件(ii)，$\varphi(b) = 0$；当$\varphi(a) = 1$时，同理可得$\varphi(b) = 1$.所以$b \in X(\varphi, 1)$，从而$b^{\mathrm{T}} \in X^{\mathrm{T}}(\varphi, 1)$，再由$\varphi^{\mathrm{T}}$的定义，$\varphi^{\mathrm{T}}(b^{\mathrm{T}}) = 0$.这表明$\varphi^{\mathrm{T}}$满足$F3$条件(ii)的前半部分。

若$\varphi^{\mathrm{T}}(a^{\mathrm{T}}) = 1$，此时$a^{\mathrm{T}} \in X^{\mathrm{T}}(\varphi, 3)$.由引理3，$X^{\mathrm{T}}(\varphi, 3$

$\subseteq A_0(n)$.所以$a^T \in A_0(n)$，a^T不含1/2坐标分量，不存在断化问题，故φ^T对$F3$条件(ii)的后半部分自然满足。

以上已证得φ^T是$A(n)$上的$F3$—函数。同时上文还推得：若$\varphi^T(a^T)=1$，则必$a^T \in A_0(n)$。换言之，当$a^T \in A(n) \backslash A_0(n)$时，$\varphi^T(a^T) \neq 1$。因此$\varphi^T \in F_1(n)$。 □

引理5 设φ_1，$\varphi_2 \in \Phi^*(n+1)$，若$\varphi_1 \neq \varphi_2$，则$\varphi_1{}^T \neq \varphi_2{}^T$.

证 因$\varphi_1 \neq \varphi_2$，所以存在一点$a \in A^*(n+1)$，有$\varphi_1(a) \neq \varphi_2(a)$。

1) $\varphi_1(a)$与$\varphi_2(a)$：一个为0，一个为1/2。不失一般性，不妨设$\varphi_1(a)=0$，$\varphi_2(a)=1/2$。

由$\varphi_1(a)=0$知$a \in X(\varphi_1, 1)$，从而$a^T \in X^T(\varphi_1, 1)$，由$\varphi_1{}^T$的定义，$\varphi_1{}^T(a^T)=0$。

由$\varphi_2(a)=1/2$知$a \in X(\varphi_2, 2) \cup X(\varphi_2, 3)$，从而$a^T \in X^T(\varphi_2, 2) \cup X^T(\varphi_2, 3)$。由$\varphi_2{}^T$的定义，$\varphi_2{}^T(a^T)$或为1/2，或为1。

总之此时有$\varphi_1{}^T(a^T) \neq \varphi_2(a^T)$，从而$\varphi_1{}^T \neq \varphi_2{}^T$。

2) $\varphi_1(a)$与$\varphi_2(a)$：一个为1，一个为1/2。与1)类似，可推得$\varphi_1{}^T \neq \varphi_2{}^T$。

3) $\varphi_1(a)$与$\varphi_2(a)$：一个为0，一个为1。

这种情况不会发生。假定存在这种情况，不妨设$\varphi_1(a)=0$，$\varphi_2(a)=1$，取c，满足$a \| c$这时$c \in A_0(n+1) \subseteq A^0(n+1) \cup A^1(n+1)$。

由于$\varphi_1 \in \Phi^*(n+1)$，所以$\varphi_1$满足

$$f_1^*(b)=\begin{cases} f(b), & \text{当 } b \in A^0(n+1) \cup A^1(n+1), \\ \varphi_1(b), & \text{当 } b \in A^*(n+1). \end{cases}$$

这里$f_1^*(b)$是$A(n+1)$上的一个$F3$—函数，满足$F3$条件，

而$f_1^*(a)=\varphi_1(a)=0$，故$f_1^*(c)=f(c)=0$。

同理，由$\varphi_2(a)=1$又可推得$f(c)=1$。这样函数f在c点出现两个值与f的单值性矛盾。所以断语成立。

1)、2)和3)已穷举了所有可能的情况，故必有$\varphi_1^T\neq\varphi_2^T$。□

命题3 $|F^*(n+1)|\leqslant|F_1(n)|$，$n\geqslant 2$。

证 $\forall\varphi\in\Phi^*(n+1)$，由引理4，$\varphi^T\in F_1(n)$。令$\pi$为$\Phi^*(n+1)$到$F_1(n)$的映射，$\pi$将$\varphi$映射为$\varphi^T$。据引理5，$\pi$是单射，于是

$$|\Phi^*(n+1)|\leqslant|F_1(n)|.$$

再由(3)式得

$$|F^*(n+1)|\leqslant|F_1(n)|.$$ □

若以$N(n)$记n元F—函数的个数(包括恒为0与恒为1)，则有以下定理。

定理2 $N(n+1)\leqslant\frac{1}{2}\{[N(n)]^2[N(n)-2^{2^n}\cdot(n2^{2n-6}-n2^{n-5}-1)]\}$，$n\geqslant 2$。

证 对定义于$A^0(n+1)$或$A^1(n+1)$上的$F3$—函数，均一一对应于删去第$n+1$个坐标的$A(n)$上的$F3$—函数。因而定义于$A^0(n+1)\cup A^1(n+1)$上的$F3$—函数个数不超过$|F(n)|^2$。

任取一个定义于$A^0(n+1)\cup A^1(n+1)$上的$F3$—函数f，可将其扩充为定义于$A(n+1)$上的$F3$—函数f^*。而命题3表明：每一f最多只能扩充成$|F_1(n)|$个$A(n+1)$上的$F3$—函数。于是

$$|F(n+1)|\leqslant|F(n)|^2|F_1(n)|,\quad n\geqslant 2.$$

由定理1的推论，有$N(n+1)=|F(n+1)|$，$N(n)=|F(n)|$。再利用命题2的结论，得

$$N(n+1)\leqslant\frac{1}{2}\{[N(n)]^2[N(n)-2^{2^n}\cdot(n2^{2n-6}-n2^{n-5}-1)]\},\ n\geqslant2. \qquad \square$$

推论 $N(n+1)<\frac{1}{2}[N(n)]^3$.

证 利用已知的$N(1)=6$，$N(2)=84$，$N(3)=43918$，直接代入验证可知当$n=1$，2时推论成立。当$n\geqslant3$时，因

$$n2^{2n-6}-n2^{n-5}-1=n2^{n-5}(2^{n-1}-1)-1\geqslant3\cdot2^{3-5}\cdot(2^{3-1}-1)-1>0,$$

所以由定理2

$$N(n+1)\leqslant\frac{1}{2}\{[N(n)]^2[N(n)-2^{2^n}\cdot(n2^{2n-6}-n2^{n-5}-1)]\}<\frac{1}{2}[N(n)]^3 . \qquad \square$$

此外，还可证明(证明留给读者)

$$N(n+1)>[N(n)]^2.$$

$n\leqslant4$，$N(n)$已有准确值($N(4)=160，297，285，276$)，利用这些值和本节公式，可具体估计出其它$N(n)$。

第八章　几项实际应用

§ 8.1　照片分类

Tamura[1]等把Fuzzy等价关系用于照片分类。

现有三个家庭，每个家由血缘亲属四人至七人组成。取每人的一张照片，共十六张放在一起，要求通过照片按容貌的相像程度把三个家庭区分开来。

首先，建立相似关系．任取两张照片，请若干陌生的中学生按容貌相像程度评分．非常相像者评为100分，七成相像者评为70分，根本不相像者评为0分。分数都在0与100之间。计算分数的平均值并折合成隶属度，得到容貌的Fuzzy相似方阵$\underset{\sim}{R}=(r_{ij})$。见表1.

由于方阵是对称的。所以只写出它的上三角部分。

其次利用逐次平方法计算Max－Min传递闭包$\hat{\underset{\sim}{R}}=(\hat{r}_{ij})$。见表2.

第三步作聚类图．依次对门限高度 $\alpha=1$，0.8，0.6，0.5，0.4考察有哪些等价类。

当$\alpha=1$　每张照片各成一等价类。

当 $\alpha=0.8$　等价类为{1,13}，{6,8,16}，{4,9,10,12,15}，{2,5,7,11,14}，{3}.

---

〔1〕 S.Tamura et al.《Pattern classification based on fuzzy relations》, IEEE Trans SMC-1, 61～66, 1971.

表 1

r_{ij}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	0	0	0	0	0.5	0	0.4	0	0	0	0	0.8	0	0	0.6
2		1	0	0	0.8	0	0.8	0.2	0.4	0	0.5	0	0	0.8	0	0
3			1	0.4	0	0.2	0	0.2	0	0.2	0.2	0.2	0.2	0	0.4	0
4				1	0	0.2	0	0.5	0.8	0.2	0.2	0.8	0.4	0.2	[illegible]	0.2
5					1	0	0.4	0	0.4	0	0	0	0	0.4	0	0.2
6						1	0	0.8	0.2	0	0	0	0.4	0	0.2	0.6
7							1	0	0.4	0.2	0.8	0	0	0.8	0	0
8								1	0	0	0	0	0.4	0	0	0.4
9									1	0.2	0.4	0.4	0	0.2	0.2	0
10										1	0.2	0.8	0	0.2	0	0
11											1	0	0	0.6	0	0
12												1	0	0	0.2	0
13													1	0	0.2	0.4
14														1	0	0.2
15															1	0
16																1

表 2

$\hat{r}_{ij}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	0.4	0.4	0.5	0.4	0.6	0.4	0.6	0.5	0.5	0.4	0.5	0.8	0.4	0.5	0.6
2		1	0.4	0.4	0.8	0.4	0.8	0.4	0.4	0.4	0.8	0.4	0.4	0.8	0.4	0.4
3			1	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
4				1	0.4	0.5	0.4	0.5	0.8	0.8	0.4	0.8	0.5	0.4	0.8	0.5
5					1	0.4	0.8	0.4	0.4	0.4	0.8	0.4	0.4	0.8	0.4	0.4
6						1	0.4	0.8	0.6	0.5	0.4	0.5	0.6	0.4	0.5	0.8
7							1	0.4	0.4	0.4	0.8	0.4	0.4	0.8	0.4	0.4
8								1	0.5	0.5	0.4	0.5	0.6	0.4	0.5	0.8
9									1	0.8	0.4	0.8	0.5	0.4	0.8	0.6
10										1	0.4	0.8	0.5	0.4	0.8	0.5
11											1	0.4	0.4	0.8	0.4	0.4
12												1	0.5	0.4	0.8	0.5
13													1	0.4	0.5	0.6
14														1	0.4	0.4
15															1	0.5
16																1

当$\alpha=0.6$　等价类为{1,13,6,8,16}，{4,9,10,12, 15}
{2,5,7,11,14}, {3}

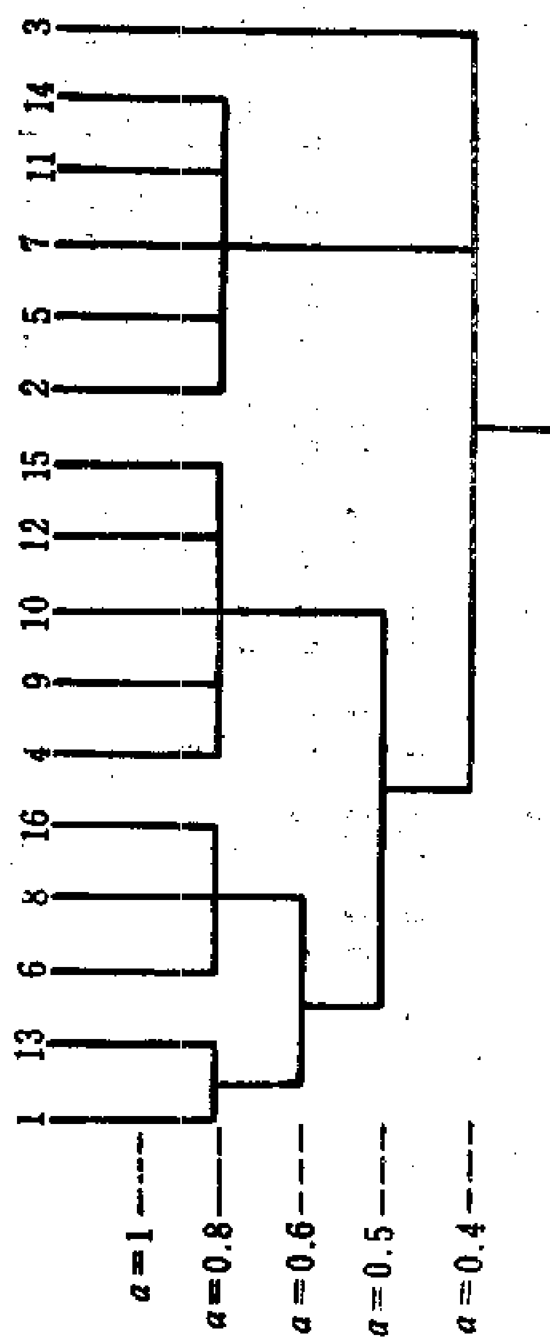


图 1

当$\alpha=0.5$　等价类为{1,13,6,8,16,4,9,10,12,15}
{2,5,7,11,14}，{3}。

当$\alpha=0.4$　全部照片成为一个等价类。

按照分三家、每家四人到七人的要求，宜取$\alpha=0.6$。此时3拒绝分类。其余15人分成三个家庭即

{1,13,6,8,16}，{4,9,10,12,15}，

{2,5,7,11,14}，

与实际相符。

单独考察3。从表1第三行看出，3与其他人的相似程度都不超过0.4，因而在$\alpha>0.4$时，3必然独成一类。但是3与4、3与15的相似程度均为0.4，高于3与其它人的相似程度、既然已知每个家庭均由血缘亲属组成，因此3应与4、15同在一家。故结论是

{1,13,6,8,16}，{3,4,9,10,12,15}，

{2,5,7,11,14}。

实际情况是这样的，以□表示祖父母，○表示父母，△表示子女。则三家成员组成见图2。

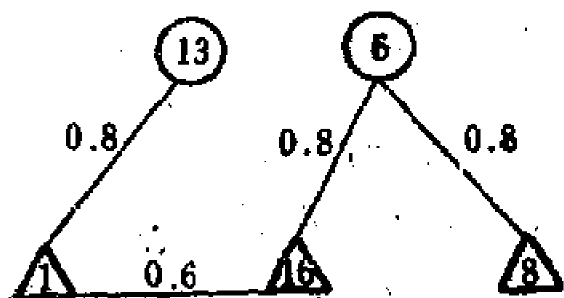


图1

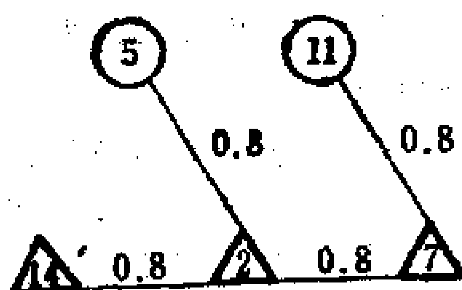


图2

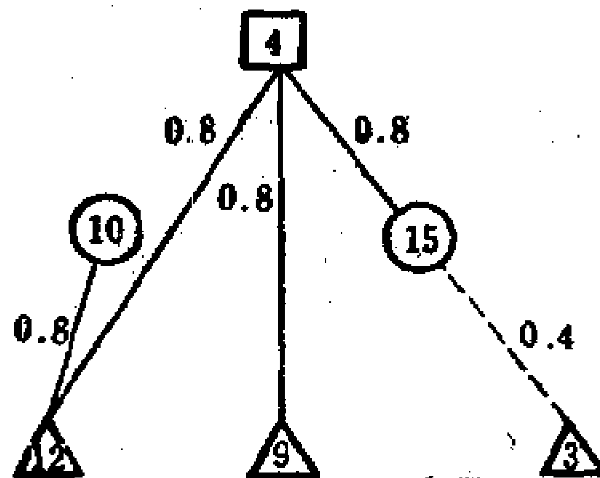


图 2

§8.2 癌细胞的识别

本节介绍钱敏平[1]等利用Fuzzy集进行癌细胞识别的方法。

病理医生的临床经验表明，判别鳞状上皮单个细胞主要根据以下几项准则：

(1) 核增大。

(2) 核浆比倒置。

(3) 核增深。

(4) 核内染色质出现粗颗粒，结成团块；或核膜、核仁；染色质不均匀。

(5) 核形状畸变(正常细胞核为圆形或卵圆形)。

(6) 整个细胞呈长条状、纤维状、串状等各种畸形。

---

〔1〕钱敏平等《利用模糊集理论进行癌细胞识别》，生物化学与生物物理进展，1979年第3期。

这些准则均以自然语言表达，这无明确的数字指标。以核增大为例，正常表层细胞核的直径为4微米左右，中层和深层细胞核的直径各为7微米左右和9微米左右。癌细胞核较同一深度的正细胞核大些。鉴于这些准则的不确定性，利用Fuzzy集进行处理是适宜的。

令所有被检验的细胞构成论域U，引进U上的Fuzzy集

A，B，C，D，E，F：

A表示“核增大”；

B表示“核桨比倒置”；

C表示“核增深”；

D表示“核内染色质不均匀”；

E表示“核畸形”；

F表示“细胞畸形”。

对U的每个元素u测定下面的七个量并记

$$u=(N_A,\ N_I,\ M_I,\ M_E,\ N_L,\ A,\ L),$$

其中：

N_A表示核(拍照)面积；

N_I表示核内总光密度；

M_I表示核内平均光密度；

N_E表示核内平均透过率；

N_L表示核周长；

A表示细胞面积；

L表示细胞周长。

规定上述Fuzzy集的隶属函数如下：

$$(1)\qquad A(u)=\left[1+\frac{\alpha_1(N_{A_0})^2}{(N_A)^2}\right]^{-1},$$

α_1是一个常数，N_{A_0}代表正常细胞的核面积。

$$(2)\qquad B(u)=\left[1+\frac{\alpha_2}{(N_A)^2}\right]^{-1}$$

α_2是一个常数。

$$(3)\qquad C(u)=\left[1+\frac{\alpha_3}{(N_I)}\right]^{-1}$$

α_3是一个常数。

核增深是癌与核异质的重要特征之一。对于某些细胞，尽管出现了核浆比倒置，但由于核未显著增深，也可以做出尚非癌细胞的判决。

$$(4)\qquad D(u)=\left[1+\frac{\alpha_4}{\gamma^2}\right]^{-1}$$

$$\gamma=\frac{W_E+\lg M_I}{M_E}\cdot 100\%$$

α_4是一个常数。

$$(5)\qquad E(u)=\left[1+\frac{\alpha_5}{(q-q_0)^2}\right]^{-1}$$

$$q=\frac{(N_L)^2}{N_A}$$

α_5是一个常数，$q_0=4\pi$。

在表1中，令常数$\alpha_5=0.5$，对七种几何图形列出q与E的对应值。由此可见，$q(u)$表示细胞u的核近似于圆的程度，所谓细胞核畸形即指核的形状与正常细胞核的圆形有显著区

别。

表1　核畸形的隶属度

形　　状	q	E_4 ($\alpha_5=0.5$)
	$4\pi=12.56$	0
	20.79	0.94
	13.34	0.47
	16	0.87
	18.5	0.92
	23.93	0.96
	21.33	0.95

$$(6)\ F(u)=\left[1+\frac{\alpha_6}{(p-p_0)^2}\right]^{-1}$$

$$p=\frac{L^2}{A}$$

α_6及p_0是常数。

对于一部份形状奇特的细胞，仅仅根据细胞畸形一项准则，即可判决它是否为癌细胞。但是由于正常细胞的形状与圆形亦有所不同，所以常数α_6的值应比α_5大得多才能使$F(u)$符合实际情况。

癌细胞识别中的模型是论域U上的四个Fuzzy集。

癌细胞$\underset{\sim}{K}$：$\underset{\sim}{K}=((\underset{\sim}{A}\cap \underset{\sim}{B}\cap \underset{\sim}{C})\cap(\underset{\sim}{D}\cup \underset{\sim}{E}))\cup \underset{\sim}{F}$

重度核异质细胞$\underset{\sim}{L}$：$\underset{\sim}{L}=(\underset{\sim}{A}\cap \underset{\sim}{B}\cap \underset{\sim}{C})\cap \underset{\sim}{K}^c$

轻度核异质细胞$\underset{\sim}{M}$：$\underset{\sim}{M}=(\underset{\sim}{A}^{1/2}\cap \underset{\sim}{B}^{1/2}\cap \underset{\sim}{C}^{1/2})\cap \underset{\sim}{K}^c\cap \underset{\sim}{L}^c$

正常细胞$\underset{\sim}{N}$：$\underset{\sim}{N}=\underset{\sim}{K}^c\cap \underset{\sim}{L}^c\cap \underset{\sim}{M}^c$

这里$\underset{\sim}{A}^{\frac{1}{2}}$表示$U$上的一个Fuzzy集，其隶属函数

$$\underset{\sim}{A}^{\frac{1}{2}}(u)=(\underset{\sim}{A}(u))^{\frac{1}{2}}.$$

类似地理解$\underset{\sim}{B}^{\frac{1}{2}}$及$\underset{\sim}{C}^{\frac{1}{2}}$。

对每个被检验的细胞u，算出$\underset{\sim}{K}(u)$，$\underset{\sim}{L}(u)$，$\underset{\sim}{M}(u)$，$\underset{\sim}{N}(u)$后，按照隶属原则判定u应属于$\underset{\sim}{K}$，$\underset{\sim}{L}$，$\underset{\sim}{M}$，$\underset{\sim}{N}$中的哪一个模型。

§8.3 模糊指令的执行

模糊数学是由于模拟人脑思维方式而产生的数学分支，因此它可以广泛地应用在人工智能领域中。现在介绍1979年日本大阪大学田中研究室对机器人执行模糊指令的试验[1]。

研究人员向机器人提供一张粗略的城市地图，并下达一些掺有自然语言的命令，引导它到达目的地。主要指令有

[1]楼世博等《模糊数学在人工智能及信息检索中的应用》，国外自动化杂志1980年第4期。

(1) 走大约n步，记作$G_A(n)$；

(2) 走到地点x，记作$G_T(x)$；

(3) 走大约n步到x，记作$G_{AT}(n,x)$；

(4) 向右转，记作T_R；

(5) 向左转，记作T_L。

还有一些辅助指令：

(6) 朝东，朝西，朝南，朝北；

(7) 从x出发；

(8) 结束。

每个指令都对应着一个隶属函数。例如$G_A(n)$的隶属函数为

$$\mu_{G_A(n)}(x)=\frac{1}{\left(\frac{x-n}{a}\right)^n+1}$$

其中a是一个常数。

试验结果表明：虽然机器人有时会迷路，有时在徘徊，最终还是自己到达目的地。

图 1 是试验场地的示意图，箭头表示机器人前进的方向，机器人通过接口受电脑控制。例如机器人接到如下指令

"走大约20步到小饭店"

用符号表示，即为

G_{AT}(20，小饭店)

它可以分解为　　$G_A(20)\cap G_T$(小饭店)

在示意图中标出三个饭店即

$$[\text{饭店}]=\frac{1}{F}+\frac{1}{I}+\frac{1}{J}$$

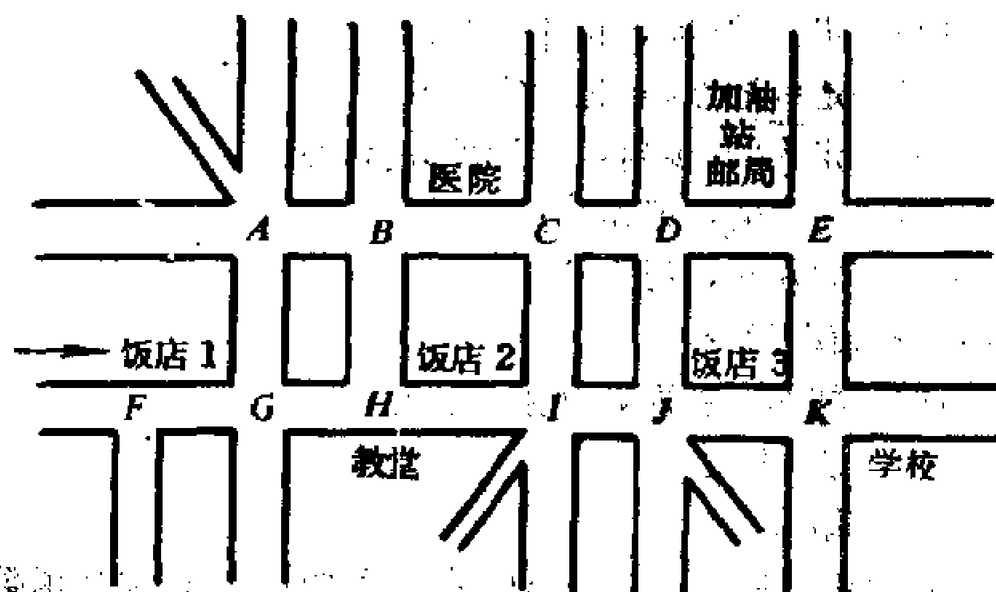


图　1

但哪个饭店算是小饭店呢？示意图中各目标所占的尺寸见表1。

表　1

地　点	类　型	尺　寸
A	十字路口1	—
B	医　院	2520
C	十字路口3	—
D	加油站	1800
E	邮　局	2280
F	饭店1	1560
G	十字路口2	—
H	教　堂	2760
I	饭店2	1080
J	饭店3	2040
K	学　校	2520

根据各目标尺寸，预先在机器人中存储Fuzzy集

$$[小]=\frac{0}{A}+\frac{0.2}{B}+\frac{0}{C}+\frac{0.5}{D}+\frac{0.3}{E}+\frac{0.6}{F}+\frac{0}{G}+\frac{0.1}{H}+\frac{0.8}{I}+\frac{0.4}{J}+\frac{0.2}{K}.$$

这样，机器人就能算出

$$[小饭店]=[小]\cap[饭店]=\frac{0.6}{F}+\frac{0.8}{I}+\frac{0.4}{J}.$$

设指令G_{AT}(20，小饭店)所对应的Fuzzy集为

$$G_{AT}=\frac{0.3}{F}+\frac{0.7}{I}+\frac{0.4}{J}.$$

于是机器人就了解I的隶属度最大，即应该走到I，亦即饭店2。

另外还有人作了让机器人选择拐杖的试验。研究人员交给机器人三根拐杖，长度分别为42，55，68公分。并发布命令

"选择一根50公分左右的拐杖"。

"50公分左右"是在论域[0，100]上的一个Fuzzy集。记作50。其隶属函数见图2。

设门限高度$\alpha=0.5$。这三根拐杖的隶属度分别为

$$\mu_{50}(42)=0.76, \quad \mu_{50}(55)=0.85,$$

$$\mu_{50}(68)=0.46.$$

因此机器人首先选择55公分长的拐杖。如果这一选择由于客观原因而无法实现(例如拐杖已被取走)，机器人就会重新选择42公分长的拐杖。如果第二选择也无法实现，由于68公分

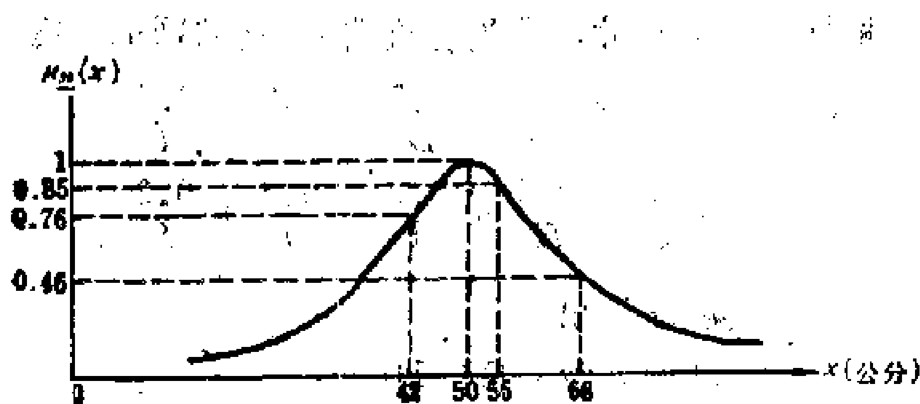


图2

拐杖的隶属度在α之下，机器人就不再重选了，而声明“此指令无法执行”。

在国外，还进行过让机器人生产巧克力奶糖（从配方到制作）、让机器人做饭等试验。这些试验也使用一些模糊指令。

§8.4 治疗肝病的专家系统

专家系统是人工智能的一个重要方面。专家系统由研制者预先把专家的经验总结出来，并用适当的形式存入电脑，以便电脑能随时针对别人提出的有关数据和问题进行归纳、演绎，代替专家作出决策判断。

本节介绍由郭荣江[1]等编制的、关于著名中医关幼波大夫治疗肝病的专家系统。

医生怎样判断病人有没有患肝炎呢？这要看看病人的各项检验指标及症状。根据关大夫临床经验，肝炎涉及的检验

[1]郭荣江等《医疗自动化系统工程与中医电子计算机诊疗程序》，1979年全国电子计算机应用学术会议论文集。

项目及症状项目为数不少，其总数n到达208项。为讨论方便计，把每项检验及症状笼统地叫做症候，并把症候排成从1到n的次序。

设R为实数轴，考察n维欧氏空间R^n的子集X，

$X=\{x|x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，每个$x_i\in[0,1]\}$。从医疗诊断的角度看，向量$x=(x_1,x_2,\cdots x_n)$体现一名具体病人的全部症候，$x_i$的值反映这名病人的第$i$项症候的轻重程度。$x_i=0$意味着病人的第$i$项症候完全正常；$x_i$的值越大，意味着病人的第$i$项症候越重；$x_i=1$意味着病人的第$i$项症候必处于登峰造极的境地。我们把向量$x$叫做症候群。把子集$X$叫做症候群空间。$X$显然是$R^n$中的单位立方体。

以上让x_i取值于闭区间$[0,1]$。也可以让x取值于有限集。常见的有两种。

第一种是R^n的子集Y，

$$Y=\{y|y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\text{每个}y_i\in\{0,1/3,2/3,1\}\}.$$

y_i取值于$\{0,1/3,2/3,1\}$，意味着第i项症候划分为阴性（－）、阳性（＋）、双阳性（＋＋）、强阳性（＋＋＋）四个等级。我们把向量y叫做四级症候群，把Y叫做四级症候群空间。Y显然由4^n个网格点构成。

第二种是R^n的子集Z，

$Z=\{z|z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$每个$z_i\in\{0,1\}\}$。$z_i$取值于$\{0,1\}$，意味着第$i$项症候划分为正常(0)、异常(1)两个等级。我们把向量z叫做二级症候群，把Z叫做二级症候群空间。Z显然有2^n个网格点构成。

作为示意，考虑黄胆指数、发热、呕吐三项症候。此二级症候群空间Z 由$2^3=8$个网格点构成。(1,1,0)表示病人的黄胆指数异常、发热、不呕吐；(0，0，1)表示病人的黄胆指数正常、不发热、呕吐；如此等等。

肝炎是肝病的总称，中医把肝炎分为脾虚、湿热、气血两虚、气虚血滞等类型。怎样根据症候群疹断病人患了哪一类型肝炎呢？

为叙述简便起见，取二级症候群空间Z作论域。把肝炎的各种类型看成Z 上的 Fuzzy 集，于是肝炎的疹断问题就是确定Z的元素 $z^{(i)}$，$i=1, 2\cdots, z^n$ 以多大程度隶属于哪个 Fuzzy 集的问题。

以$\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(Z)$表示肝炎的某一类型。设 $\underset{\sim}{A}$ 的标准症候群是 Z 中的点 $z^{(0)}$，

$$z^{(0)}=(z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \cdots, z_n^{(0)})。$$

若$z_j^{(0)}=1$，则第 j 项症候是$\underset{\sim}{A}$的表现症候。若 $z_j^{(0)}=0$，则第 j 项症候与$\underset{\sim}{A}$不相干。于是$\underset{\sim}{A}$确定表现症候的指标集

$$J=\{j_1, j_2\cdots, j_k\}。$$

这里j_i代表第j_i项症候，$k\leqslant n$。

各项症候在肝炎类型$\underset{\sim}{A}$中所起的作用不尽相同，它们的权重也就不尽相同。首先给J中所有症候赋以权系数

$$\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \cdots, \alpha_{j_k}。$$

权系数的大小，可根据专家经验以及统计资料两方面结合的方法或 Fuzzy 综合评判等方法来确定，也可用人工智能的方法通过机器学习来形成。初步确定的权系数，必须经过实验反复调整。

接着给所有症候赋以权系数β_i，$i=1, 2, \cdots, n$，当$i\in J$令$\beta_i=\alpha_i$；当$i\notin J$，令β_i等于0或负数。为什么使用负数呢？因为有些症候，例如“消化好”是各类型肝炎病都不应该有的。如果出现消化好的症候，那么在一定程度上可以否决病人患了肝炎。对某些具有否决作用的症候，α_i不仅等于负数，还应等于绝对值较大的负数。

对任意二级症候群$z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in Z$。我们计算

$$p_{\underset{\sim}{A}}^{(0)}=\sum_{l=1}^{k}\alpha_{j_l}z_{j_l}^{(0)}=\sum_{l=1}^{k}\alpha_{j_l}=\sum_{j\in J}\alpha_j,$$

$$p_{\underset{\sim}{A}}(z)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i z_i=\sum_{i=1}^{n}\beta_i.$$

于是由$p_{\underset{\sim}{A}}^{(0)}$及$p_{\underset{\sim}{A}}(z)$确定$z$对某型肝炎$\underset{\sim}{A}$的隶属度

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(z)=\begin{cases}0 & \text{当}p_{\underset{\sim}{A}}(z)<0\\ \dfrac{p_{\underset{\sim}{A}}(z)}{p_{\underset{\sim}{A}}^{(0)}} & \text{当}p_{\underset{\sim}{A}}(z)\geqslant 0\end{cases}.$$

显然$\mu_{\underset{\sim}{A}}(z)\in[0, 1]$并且

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(z^{(0)})=1.$$

作为例子，下面根据关幼波的经验，给出脾虚型迁延性肝炎$\underset{\sim}{A}$的表现症候以及相应的权系数，见表1。$\underset{\sim}{A}$的表现症候的指标集$J=\{j_1, j_2, \cdots, j_{16}\}$。

根据公式计算

$$p_{\underset{\sim}{A}}^{(0)}=\sum_{j\in J}\alpha_j=45.$$

表 1

j_i	第 j_i 项 表 现 症 候	权系数 a_{j_i}
j_1	GPT异常	3
j_2	TTT高	2
j_3	纳呆或纳差	2
j_4	脘腹胀	5
j_5	肠鸣	4
j_6	矢气多	4
j_7	完谷不化	4
j_8	乏力	4
j_9	便溏或腹泄	4
j_{10}	怕冷	1
j_{11}	苔薄白或白	1
j_{12}	舌边有齿痕	2
j_{13}	脉沉缓或沉滑	3
j_{14}	月经错后与色淡或淋漓不止	3
j_{15}	肝区累后疼	2
j_{16}	嗳气	1

设某病人的检验结果及症状如下。

"GPT异常，TTT高，胃纳差，
脘腹胀，肠鸣，乏力，怕冷，
脉沉缓，口干，喜热饮，舌苔
薄黄。"

因为口干、喜热饮、舌苔薄黄这三项都不是脾虚型迁移性肝炎A的表现症候，所以相应的权系数应该等于0. 令z表示这名

病人的二级症候群，便有

$$p_{A}(z)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i=3+2+2+5+4+4+1+3$$

$$=24\ .$$

于是得到症候群z对A的隶属度

$$\mu_{A}(z)=\frac{24}{45}=0.53\ .$$

肝病疹断的实质是进行模式识别。每类肝炎作为一个模式都有一个隶属函数．症候群则是待识别的对象；按照隶属原则判断症候群属于肝炎的哪一类型。

不过只有当各类肝炎的隶属函数彼此协调的时候，隶属原则的运用才是可靠的，而这需要实践的长期检验与反复调整。在这些隶属函教的协调性尚未获得保证之前，可以采用浮动阈值的办法。对第r类肝炎$A^{(r)}$，让阈值$S^{(r)}$在上限$\overline{S}^{(r)}$及下限$S^{(r)}$之间浮动。记

$$A^{(r)}=\{z|z\in Z,\ \mu_{A(r)}(z)\geqslant S^{(r)}\}.$$

$A^{(r)}$显然就是$A^{(r)}$的$S^{(r)}$－截集。阈值的上限、下限、浮动速率都可以随着r的改变而改变。在阈值从上限向下限的浮动过程中，检查哪个r首先使症候群$z\in A^{(r)}$；此时就判定z属于r类肝炎$A^{(r)}$。

根据北京中医医院门疹部统计，在随机取样的100个病例中，此专家系统的疹断与关大夫本人的疹断已达96%的符合率，在实用中取得良好的效果。

§ 8.5 组合电路的故障诊断

随着数字系统的应用范围的扩大以及复杂程度的增加，数字电路的故障诊断问题日益受到重视。为了对组合电路(一类数字电路)的故障进行全面的研究，徐志伟[1]从模糊逻辑入手，运用模糊变量描述故障状态，并证明电路的全部故障信息直接包含在故障函数的最小项范式中。于是以此范式作工具，直观简便地处理故障模拟、故障诊断、故障冗余及屏蔽的检测等问题。

本节同时出现模糊变量和布尔变量，为不致混淆，称由布尔变量或其补组成的片语为项；每一变量或其补都出现的项为最小项。由定义可算出n个变元的最小项共有2^n个。

在二值逻辑中，$x\bar{x}=0$，所以若以X^i表示最小项，易知

$$X^iX^j=\begin{cases}0, & i\neq j\\ X^i, & i=j\end{cases}. \tag{1}$$

同时因$x+\bar{x}=1$，所以反复利用$x_i=x_i(x_j+\bar{x}_j)=x_ix_j+x_i\bar{x}_j$可知任一项均可化为最小项之和，进而推知任一布尔函数可由最小项之和表示。具体说来，设f为布尔函数$m_i\in\{0,1\}$，X^i为最小项，则

$$f=\sum_{i=0}^{2^n-1}m_iX^i. \tag{2}$$

[1]徐志伟《模糊逻辑在组合电路故障诊断中的应用》，成都电讯工程学院学报，1983年第3期。

称上式为布尔函数f的最小项范式。

本节指的电路均指组合电路，此电路是由一些“门”组成，其输出仅与当前的输入有关，且不带反馈。组合电路可用来实现布尔函数。

下面具体讨论故障诊断问题，只讨论固定型故障。

一、故障函数最小项范式

设电路C实现布尔函数$f=f(x_1,\cdots,x_n)$，C有m条连线。对每一线i指派一个模糊变量y_i以对应其故障情况。因讨论的是固定型故障，所以线i只有三种状态：线i正常，线i出现信号始终为逻辑值1的故障（记为线i $s-a-1$）以及线i出现信号始终为逻辑值0的故障（记为线i $s-a-0$）。我们定义

$$y_i=\begin{cases}1\ ,\ \text{线}i\text{正常},\\ 1/2\ ,\text{电}i\ s-a-1,\\ 0\ \ \text{线}i\ s-a-0\ .\end{cases} \tag{3}$$

设线i的输入为G_i，易于验证线i的故障情况可由输出

$$F_i=y_iG_i+y_i\overline{y_i} \tag{4}$$

反映出来，事实上

$$F_i=\begin{cases}G_i\ ,\ \text{线}i\text{正常},\\ 1/2,\text{线}i\ s-a-1,\\ 0\ ,\ \text{线}i\ s-a-0.\end{cases}$$

从原始输入端起顺次将m条线的输入G_i写成F_i，就得到电路C的因果函数（即包含故障状态（因）的电路的输出（果）表达式）$F=F(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)$。

例　图1中的电路包含三个“与”门（Ⅰ、Ⅱ和Ⅲ）、一个

"或"门（Ⅳ）和一个"非"门（Ⅴ）。该电路共有三个输入变量、十四根连线，根据故障等价，可简精为只考虑六条连线。

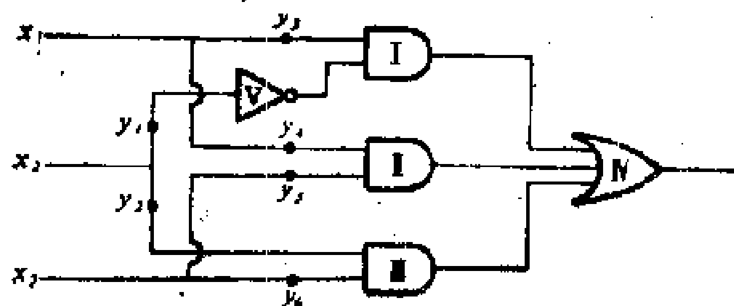


图1

该电路实现的布尔函数为

$$f = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

$$= \bar{x}_1x_2x_3 + x_1\bar{x}_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1x_2x_3,$$

因果函数为

$$F = (y_3x_1 + y_3\bar{y}_3)(y_1x_2 + y_1\bar{y}_1) + (y_4x_1 + y_4\bar{y}_4)(y_5x_3 + y_5\bar{y}_5) + (y_2x_2 + y_2\bar{y}_2)(y_6x_3 + y_6\bar{y}_6).$$

对因果函数 $F = F(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$，若把$y_1, \cdots, y_m$ 看作参量将F展成$x_1, \cdots, x_n$ 的最小项范式，则有

$$F = \sum_{i=0}^{2^n-1} m_i(Y)X^i .$$

其中$Y = (y_1, \cdots, y_m)$，X^i为最小项。此时$m_i(Y)$是Y的函数（F-函数）。

易知，任一组合电路可看为一个无环有向图，其中门是结点，线是有向边。

定义1 将组合电路看为有向图，若从线i到线j有一条有向路径，则称线j的故障是线i的故障的前驱，或称后者是前者的后继。

定义2 以$A=\{\alpha,\beta,\gamma,\cdots\}$表电路$C$的全体故障和$C$正常组成的集，$y_i(i=1,\cdots,m)$是$C$中为线$i$指的模糊变量，这些变量和它们的补组成的片语的集用$P$表示。定义映射$\varphi$：$P\to A$如下：

$$\alpha=\varphi(p)=\begin{cases}\text{线}i\ s-a-0, & p\text{含}\bar{y}_i\text{不含}y_i,\\ \text{线}i\ s-a-1, & p\text{含}y_i\bar{y}_i\ (\text{简记为}y_i^*),\\ \text{线}i\ \text{正常}, & p\text{不含}y_i,\end{cases}$$

$i=1,\ \cdots,\ m$。

显然，通过映射φ，片语p可表示故障α。例如$p_1=y_1y_2\bar{y}_2$表单故障“线2 $s-a-1$”，$p_2=\bar{y}_1y_2\bar{y}_3$表双故障“线1 $s-a-0$与线3 $s-a-0$”。在下面的讨论中，我们对片语p和p所表示的故障不加区分。我们约定：若p是q的后继(即有自p代表的各线至q代表的各线的有向路径)，或p、q间无前驱后继关系，则q也表示pq。如图2中，y_7^*也表示$\bar{y}_1y_7^*$，$y_2^*y_7^*$等；y_4也表示$y_1^*y_4$，$\bar{y}_1\ \bar{y}_2\ \bar{y}_4$等，但不表示$\bar{y}_4y_7^*$，

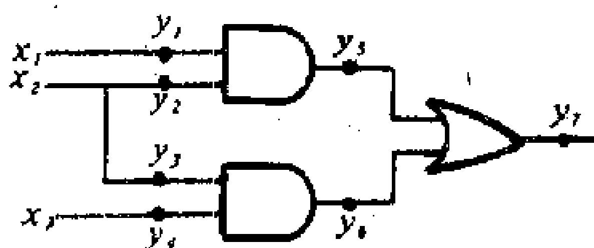


图 2

因为y_7^*是$\overline{y_4}$的前驱。

下面用⊕表"异或"运算，即

$$x \oplus y = x\bar{y} + \bar{x}y \text{ .}$$

定义3 设电路C实现布尔函数$f = \sum_{i=0}^{2^n-1} m_i X^i$，$C$的因果函数为$F = \sum_{i=0}^{2^n-1} m_i(Y) X^i$。定义$C$的故障函数$Fe = F \oplus f$。若$Fe$已被展成$x_1$，…，$x_n$的最小项范式，则称为$C$的故障函数最小项范式，简称为故障范式。

由(1)式易推得

$$Fe = F \oplus f = \left(\sum_i m_i(Y) X^i\right) \oplus \left(\sum_i m_i X^i\right)$$

$$= \sum_i (m_i(Y) \oplus m_i) X^i = \sum_i M_i(Y) X^i \text{ .}$$

其中

$$M_i(Y) = m_i(Y) \oplus m_i = \begin{cases} m_i(Y), & m_i = 0, \\ \overline{m_i(Y)}, & m_i = 1. \end{cases}$$

定理 设电路C实现布尔函数$f = \sum_i m_i X^i$，C的故障范式为$Fe = \sum_i M_i(Y) X^i$，其中$M_i(Y) = m_i(Y) \oplus m_i$已被展成析取范式。令$\widehat{X^i}$是满足$X^i = 1$的测试，则$M_i(Y)$恰恰包含$C$中$\widehat{X^i}$可测的所有故障。

$M_i(Y)$展成析取范式后是一些片语之和，前文已叙及这些片语可表示电路的故障。另一方面将使最小项$X^i=1$的$\widehat{X}^i\in\{0,1\}^n$输入电路$C$，若$C$存在故障$p$的响应与正常响应不同，则称$p$是$\widehat{X}^i$可测的，定理表明所有这些$p$恰恰组成了$M_i(Y)$。下面证明定理。

证 注意到$x+y=\overline{\bar{x}\cdot\bar{y}}$易知“与”门与“非”门可构成任何功能的组合电路，因此我们只须证由上述两种门组成的组合电路定理成立即可。我们对电路的级数（第k级电路的输出是第$k+1$级电路的输入）进行归纳证明。

1） 原始输入端情况，电路如图3(a)。该电路只可能存在两个单故障$\bar{y}$和y^*。其中$\bar{y}$能被测试$x=1$测出，这是因输入$x=1$，故障$\bar{y}$使输出为0（正常为1）；同理，y^*能被测试$\bar{x}=1$测出，故要使定理成立Fe中x前系数应为$\bar{y}$，$\bar{x}$前系数应为y^*，即

$$Fe=\bar{y}x+y^*\bar{x}.$$

另一方面，该电路实现布尔函数$f=x$，因果函数为$F=yx+y^*=yx+y^*\bar{x}$，由定义3

$$Fe=F\oplus f=(yx+y^*\bar{x})\oplus x=\bar{y}x+y^*\bar{x}.$$

两者一致，故定理成立。

2） 设对实现布尔函数g，g_1，g_2的k级电路定理成立，现需证对$k+1$级电路（图3(b)、(c)）定理成立，而这又只需证对图3(d)、(e)、(f)的电路定理成立。

(i) 图3(d)情况。设$g=\sum\limits_i m_iX^i$，$G=\sum\limits_i m_i(Y)X^i$。

由归纳假设

$$G\oplus f=\sum_i(m_i(Y)\oplus m_i)X^i$$

中X^i前系数$m_i(Y)\oplus m_i$恰恰包含对实现g的电路$\hat{X}^i$可测的所有故障，因此$(m_i(Y)\oplus m_i)z$表示了图3(d)中z线正常时$\hat{X}^i$可测的所有故障。除此之外，当$m_i=1$时，故障$\bar{z}$（由定义2和约定$\bar{z}$表示线z $s-a-0$的单故障和线z $s-a-0$与原电路所有故障组合构成的多故障）也是$\hat{X}^i$可测的。这是因对使$X^i=1$的测试$\hat{X}^i$有$f(\hat{X}^i)=g(\hat{X}^i)=1$，而故障$\bar{z}$却使输出为0。同理，当$m_i=0$时，故障$z^*$（表示线$z$ $s-a-1$的单故障和线z $s-a-1$与原电路所有故障的各种组合构成的多故障）也是$\hat{X}^i$可测

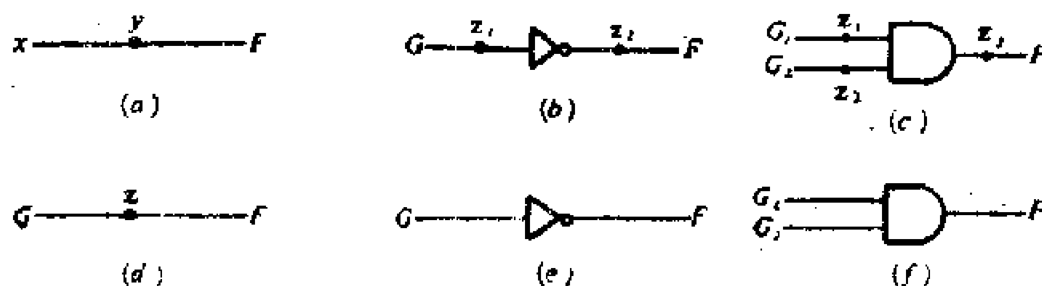


图 3

的。此外再无其它$\hat{X}^i$可测故障，所以要使定理成立只需有

$$Fe = \sum_i M_i(Y)X^i, \quad M_i(Y) = \begin{cases} m_i(Y)z + z^*, & m_i = 0, \\ \overline{m_i(Y)}\ z + \bar{z}, & m_i = 1. \end{cases}$$

而按定义3计算有

$$Fe = F \oplus f = (zG + z^*) \oplus g$$

$$= (z\sum_i m_i(Y)X^i + z^*) \oplus (\sum_i m_i X^i)$$

$$= \sum_i ((m_i(Y)z + z^*) \oplus m_i)X^i = \sum_i M_i(Y)X^i$$

$$= \sum_{m_i=0} (m_i(Y)z + z^*)X^i + \sum_{m_i=1} (\overline{m_i(Y)}\ z + \bar{z})X^i.$$

两者一致，故定理成立。

(ii) 图3(e)的情况。此电路故障不变，测试也不变。要满足定理故障范式也应不变。这是一个"非"门。

$$Fe = F \oplus f = \bar{G} \ominus \bar{g} = G \oplus g = Ge$$

故定理成立。

(iii) 图3(f)的情况。这是一个"与"门。

一般地，G_1, G_2, g_1, g_2的变量集X_1, X_2, Y_1, Y_2不一定一致，但恒可取$X = X_1 \cup X_2$，$Y = Y_1 \cup Y_2$，然后将函数按X展开。设

$$g_1 = \sum_i m_i^1 X^i, \quad g_2 = \sum_i m_i^2 X^i, \quad G_1 = \sum_i m_i^1(Y)X^i,$$

$$G_2 = \sum_i m_i^2(Y)X^i.$$

又设 $f_\gamma(\widehat{X^i})$ 是电路有故障γ而输入为 $\widehat{X^i}$ 时的输出。图3(f)所示电路的故障γ是实现 g_1、g_2 的电路 C_1、C_2 的故障 α、β 的组合。有下列推理：

当 $m_i = m_i^1 m_i^2 = 0$ 时，$\widehat{X^i}$ 是γ的测试 $\Longleftrightarrow f_\gamma(\widehat{X^i}) = 1 \Longleftrightarrow g_{1\alpha}(\widehat{X^i}) = 1$ 且 $g_{2\beta}(\widehat{X^i}) = 1 \xLeftrightarrow{\text{由归纳假设}} m_i^1(Y)$ 中有表 α 的片语且 $m_i^2(Y)$ 中有表 β 的片语 $\xLeftrightarrow{\text{若使定理成立}} m_i^1(Y)m_i^2(Y)$ 有表γ的片语 $\Longleftrightarrow M_i(Y) = m_i^1(Y)m_i^2(Y)$。

同理可证，当 $m_i = m_i^1 m_i^2 = 1$ 时，要使定理成立，需有 $M_i(Y) = \overline{m_i^1(Y)} + \overline{m_i^2(Y)}$。

另一方面由定义3计算有

$$Fe = F \oplus f = G_1G_2 \oplus g_1g_2$$

$$= (\sum_i m_i^1(Y)m_i^2(Y)X^i) \oplus (\sum_i m_i^1 m_i^2 X^i)$$

$$= \sum_i ((m_i^1(Y)m_i^2(Y)) \oplus m_i^1 m_i^2) X^i$$

$$= \sum_{m_i=0} m_i^1(Y)m_i^2(Y)X^i + \sum_{m_i=1} (\overline{m_i^1(Y)} + \overline{m_i^2(Y)}) X^i.$$

两者一致，故定理成立。

综上，由归纳法原理定理得证。 □

二、故障范式的应用

1. 故障模拟(故障分析)

有了故障范式，$\widehat{X^i}$ 可测的所有故障就一目了然地表示在

$M_i(Y)$中，因而故障范式对组合电路的故障模拟或分析是十分方便的。

2. 故障的检测和诊断

将故障范式按故障展开，就得到了每一故障的全部测试，从而故障(单故障和双故障)的完全测试集和诊断集都可用现有的方法(如各种最小复盖算法)求得。

3. 故障冗余的检出

冗余是指电路在存在某些故障情况下仍能正常工作，它与不可测故障有关。每根连线有三种状态，易算出m条连线共有3^m-1种故障，而故障范式包含了电路中所有可测故障，于是可求得所有不可测故障，从而可检查电路的冗余。

4. 故障屏蔽的检出

对测试$\widehat{X^i}$，故障α屏蔽β（记为$\widehat{X^i}$：$\alpha\rightarrow\beta$）是说β单独出现时能被$\widehat{X^i}$检测，但当α也出现时检测失效。因$\widehat{X^i}$可测的所有故障都表现在$M_i(Y)$中，因此$M_i(Y)$能反映故障屏蔽情况。事实上设，p_α、p_β分别为表示故障α、β的片语，则$p_\alpha p_\beta$就是表示故障$\alpha\beta$的片语(即α与β同时出现)，$\widehat{X^i}$：$\alpha\rightarrow\beta$当且仅当$M_i(Y)$含p_β但不含$p_\alpha p_\beta$。

主要参考资料

〔1〕 汪培庄，模糊集合论及其应用，上海科技出版社，1983。

〔2〕 陈贻源，模糊数学，华中工学院出版社， 1984。

〔3〕 模糊集引论讲义，北京师范大学数学系， 1984 。

〔4〕 扎德著，陈国权译，模糊集合、语言变量及模糊逻辑，科学出版社，1982。

〔5〕 浅居喜代治等著，赵汝怀译，模糊系统入门， 北京师范大学出版社，1982。

〔6〕 亚伯拉罕等著，楼世博译，模糊开关和自动机理论和应用，上海科技出版社，1984。

〔7〕 郑艰川、区奕勤，有限Fuzzy关系方程的一种解法，成都电讯工程学院学报，1982(3)，39－47。

〔8〕 张先迪，Fuzzy 开关函数个数的上界估计，电子学报，1987(3)，70-75。

〔9〕 D. Dubois and H. Prade, Fuzzy Set and Systems——Theory and Application Academic Press, 1980.

〔10〕 E.Sanchez, Resolution of Composite Fuzzy Relation Equations, Inform.Control, 30, No.1, 1976, 38-48.